6. Particle drifts (discussion and correction: 21.1.2014)

A) magnetic mirror

Along the axis of a magnetic mirror the magnetic B field is assumed to be

$$B_z(z) = B_0(1 + a^2 z^2)$$

The configuration is axisymmetric and symmetric with respect to the $(x = 0, y = 0)$ plane.

1. The velocity of an electron at $z = 0$ is assumed to be $v^2 = 3v_\parallel^2 = 1.5v_\perp^2$. At which position z is the electron reflected?

2. Write down the equation of motion parallel to the field (i.e. along the axis) for the giuding centre of the electron!

3. Show that the motion is periodic and calculate its frequency.

B) gravitational drift

1. Calculate the current density $\mathbf{j}$ that is caused by the gravitation field of the earth (radius 6370km) in the ionosphere 300km above the equator! Assume that the current is carried by oxygen ions (O_2^+) and electrons with a density of $6 \cdot 10^{12} m^{-3}$. The magnetic field is $5 \cdot 10^{-5} T$ and $\mathbf{g} \perp \mathbf{B}$ (magnetic field is perpendicular to direction of gravitational field).

2. Above the equator the earth magnetic field decays like $\sim r^{-3}$. At what critical particle energy is the current due to the gradient B drift larger than the current due to the gravitational drift?

C) Consider a collision free electron-proton plasma in a condensator with a constant magnetic field $B = 1T$ and the field lines parallel to the condensator plates. A low-frequency ac voltage causes a polarisation current $j_{pol} = (n_p m_p + n_e m_e)/B^2 \frac{dE}{dt}$ and the plasma acts like a dielectric medium. Caluclate the dielectric constant ϵ_r.

Hint: Use $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 j + \mu_0 \epsilon_0 dE/dt = \mu_0(\epsilon_0 \epsilon_r dE/dt)$

Solution:

A)

5.1.1:

Aus der Invarianz des magnetischen Momentes und der kinetischen Energie folgt mit $v_\perp^2 = \frac{2}{3}v^2$ bei $z = 0$ und $v_\perp^2 = v^2$ am Reflektionspunkt z_R:

$$\mu = \frac{mv^2}{2B(z_R)} = \frac{mv^2}{3B_0} \;\Rightarrow\; B(z_r) = \frac{3}{2}B_0 \;\Rightarrow\; (1+\alpha^2 z_R^2) = \frac{3}{2} \;\Rightarrow\; z_R = \pm\frac{1}{\alpha\sqrt{2}}$$

5.1.2:

Die Bewegungsgleichung für das Führungszentrum lautet:

$$m\dot{\vec{v}}_{||} = \vec{F}$$

Auf der Achse unseres magnetischen Spiegels zeigen alle Vektoren in z-Richtung und die Kraft ergibt sich aus dem Gradienten des magnetischen Feldes: $\vec{F} = -\mu\vec{\nabla}B$. Die Bewegungsgleichung lautet also:

$$m\ddot{z} = -\mu \cdot 2B_0\alpha^2 z$$

5.1.3:

Obige Bewegungsgleichung ist die eines harmonischen Oszillators mit

$$\omega^2 = \mu \cdot 2B_0\alpha^2/m = \frac{mv^2}{3B_0} \cdot 2B_0\alpha^2/m = \frac{2v^2\alpha^2}{3}$$

$$\Rightarrow \omega = v\alpha\sqrt{\frac{2}{3}} = v_{\perp,z=0} \cdot \alpha$$

Figure 1:

B)

4.4.1:
Die Stromdichte ergibt sich aus dem Produkt von Ladung, Teilchenzahl und Geschwindigkeit. Zunächst muß also die Geschwindigkeit berechnet werden. Für die Gravitationsdrift gilt:

$$v_g = \frac{m}{q}\frac{\vec{g}\times\vec{B}}{B^2}$$

Die Gravitationsbeschleunigung in 300 km Höhe ergibt sich zu:

$$g = 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\frac{6370^2}{(6370+300)^2} = 8.95\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Mit $m_e = 9.1\cdot10^{-31}$ kg und $m_{O_2^+} = 5.35\cdot10^{-26}$ kg ergeben sich also folgende Driftgeschwindigkeiten:

$$v_{g,e} = 1.01\cdot10^{-6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad v_{g,O_2^+} = 6\cdot10^{-2}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Dabei laufen die Elektronen von Ost nach West und die positiven Ionen entgegengesetzt. Die Stromdichte wird praktisch allein von den Ionen getragen und beträgt

$$j_g = env = 1.73\cdot10^{-2}\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$$

4.4.2:
Die Gradientendrift beträgt

$$\vec{v}_{\vec{\nabla}B} = -\frac{E_{kin,\perp}}{qB^3}\nabla B\times\vec{B}$$

und ist damit der Gravitationsdrift entgegen gesetzt. Die minimale kinetische Energie für welche die Gradientendrift größer sein kann als die Gravitationsdrift ergibt sich zu:

$$E_{kin,min} \geq mg\left|\frac{B}{\nabla B}\right|$$

Aus der radialen Abhängigkeit von $|B|$ ergibt sich

$$\frac{\nabla B}{B} = \frac{3}{r} = 4.5\cdot10^{-7}\,\mathrm{m}^{-1}$$

Die gesuchte minimale kinetische Energie ist somit 0.112 meV für die Elektronen und 6.6 eV für die Ionen. Dies bedeutet, das die Gravitationsdrift für die Elektronen keine Rolle spielt, für die Molekülionen jedoch schon.

Figure 2:

C) In the lecture we derived:

$$\mathbf{j}_{pol} = (n_e m_e + n_i m_i)\frac{\dot{\mathbf{E}}_\perp}{B^2}$$

The Maxwell's equations in matter factor out the bound charge and depend only on the free charge. That entails displacement fields:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \varrho_{free}; \quad \mathbf{E} = \mathbf{D}/(\epsilon_r \epsilon)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j_{free}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \quad \nabla \cdot \mathbf{j_{free}} = -\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t};$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j_{tot}} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \quad \nabla \cdot \mathbf{j_{tot}} = -\frac{1}{\mu_0 c^2}\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{D}} = \dot{\varrho}_{free} = -\nabla \cdot \mathbf{j_{free}} = -\nabla \cdot (\mathbf{j_{tot}} - \mathbf{j_{bound}})$$

Rewriting this expression and using that the bound current is the polarisation current $\mathbf{j}_{pol}$ and the divergence of the total current is given by the equation above, we arrive at:

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \Big(\mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E} - \frac{n_e m_e + n_i m_i}{B^2}\mathbf{E}\Big) = 0$$

Therefore,

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 (1 + \frac{n_e m_e + n_i m_i}{\epsilon_0 B^2})\mathbf{E}$$

and

$$\epsilon_r = 1 + \frac{n_e m_e + n_i m_i}{\epsilon_0 B^2} = 1 + \frac{c^2}{v_A^2}$$

with $c^2 = 1/(\mu_0 \epsilon_0)$ and $v_A = B/\sqrt{(\mu_0 n_i m_i)}$. $(m_e \ll m_i)$