

MHD-Gleichgewichte und Stabilität heißer Fusionsplasmen ¹

Hartmut Zohm
Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Garching
Ludwig-Maximilians-Universität München

5. Februar 2004

¹Dieses Skript entstand aus einer Reihe von Vorlesungen zu diesem Thema, die ich an den Universitäten Augsburg, Stuttgart und LMU München durchgeführt habe. Für die Unterstützung bei der Aufarbeitung der astrophysikalischen Seite der Thematik möchte ich mich bei den Herren Bender, Birk und Lesch von der LMU bedanken.

Inhaltsverzeichnis

1	Die MHD-Gleichungen	5
1.1	Ableitung der MHD Gleichungen	5
1.2	Konsequenzen der MHD-Gleichungen	9
1.2.1	Der 'eingefrorene Fluß'	9
1.2.2	MHD-Gleichgewichte	11
1.2.3	Alfvén-Wellen	12
2	MHD-Gleichgewicht	17
2.1	Einschluss durch Gravitation: Gleichgewicht in Sternen	17
2.2	Rotation von magnetisierten Plasmen	19
2.2.1	Isorotation	20
2.2.2	Drehimpulsverlust durch Sternwind	20
2.2.3	Pulsar-Elektrodynamik	23
2.3	Magnetischer Einschluss in Fusionsplasmen	25
2.3.1	Der z -Pinch	25
2.3.2	Der Screw-Pinch	27
2.4	Toroidale Anordnungen	29
2.4.1	Der Tokamak	29
2.4.2	Der Stellarator	33
3	MHD-Stabilitätsanalyse	37
3.1	Die Rayleigh-Taylor Instabilität	38
3.2	Die Parker-Instabilität	41
3.3	Das Energieprinzip der idealen MHD	44
4	Ideale MHD-Stabilität des Tokamak	51
4.1	Die Standardform von δW	51
4.2	Stabilität gegen stromgetriebene Moden	52
4.2.1	$\xi(a) \neq 0$, externer Kink	53

4.2.2	$\xi(a) = 0$, interner Kink	55
4.3	Stabilität gegen druckgetriebene Moden	56
4.3.1	Lokalisierte Interchange Moden	56
4.3.2	Ballooning Instabilitäten	58
4.3.3	Das β -Limit	60
5	Resistive MHD-Stabilität	63
5.1	Rekonnektion von Flussschichten	64
5.2	Rekonnektion mit Führungsfeld	67
5.3	Magnetische Inseln in Tokamaks	72
5.4	Experimentelle Beispiele	75
5.4.1	Sägezähne	75
5.4.2	Stromabbrüche (Disruptionen)	76
5.4.3	Resistives β -Limit	79
6	Literaturverzeichnis	83

Kapitel 1

Die MHD-Gleichungen

1.1 Ableitung der MHD Gleichungen

Ein magnetisiertes Plasma stellt wegen der elektromagnetischen Wechselwirkung der Teilchen untereinander ein kompliziertes Vielteilchensystem dar. Um von der (unlösbaren) Aufgabe des simultanen LöSENS von 10^{20} Bewegungsgleichungen zu einem handhabbaren System zu kommen, wird zunächst der Begriff der aus der statistischen Mechanik bekannten Verteilungsfunktion $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$ eingeführt:

$$\hat{f}_\alpha(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3x d^3v = \text{Zahl der Teilchen im Phasenraumelement } d^3x d^3v \text{ zur Zeit } t \quad (1.1)$$

Dabei wurden die Teilchen einer Sorte α bereits als ununterscheidbar angenommen, sodaß eine statistische Beschreibung gerechtfertigt ist. Die Teilchen stellen gleichzeitig auf Grund ihrer Ladung die Quelle für das elektrische Feld \vec{E} und das magnetische Feld \vec{B} dar:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.3)$$

wobei die Stromdichte durch

$$\vec{j} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int \vec{v} f_{\alpha} d^3v \quad (1.4)$$

gegeben ist. Wegen der Quasineutralität ist auf makroskopischen Abständen $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, elektrostatische Felder müssen nur bei sehr kleinen Abständen (kleiner als die Debyelänge) betrachtet werden.

Für die Verteilungsfunktion gilt die kinetische Gleichung

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_{\alpha} + \left(\frac{q}{m} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) + \vec{g} \right) \cdot \nabla_v f_{\alpha} = \left(\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} \right)_{\text{Stoß}} \quad (1.5)$$

wobei der Stoßterm die kurzreichweitige Wechselwirkung der Teilchen innerhalb einer Debyelänge beinhaltet. Die Wahl des Stoßterms führt zu bestimmten Formen der kinetischen Gleichung (z.B. Vlasov-, Boltzmann-, oder Fokker-Planck-Gleichung).

Wir wollen nun von der 6-dimensionalen Beschreibung durch die kinetische Gleichung zu einer 3-dimensionalen Beschreibung im Ortsraum übergehen. Dazu bildet man geeignete Momente von \vec{v} im Geschwindigkeitsraum, d.h. man betrachtet Integrale der Form

$$\int \vec{v}^k f_\alpha(\vec{v}) d^3v \quad \text{mit } k = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (1.6)$$

Man erhält so Gleichungen für die Momente im Ortsraum. Diesen lassen sich physikalische Größen zuordnen. Berechnet man die Integrale bis zu $k = 2$, so treten die folgenden Momente auf:

Teilchendichte n_α und Schwerpunktschwindigkeit \vec{u}_α ergeben sich zu

$$n_\alpha = \int f_\alpha(\vec{v}) d^3v \quad (1.7)$$

$$\vec{u}_\alpha = \frac{1}{n_\alpha} \int \vec{v} f_\alpha(\vec{v}) d^3v \quad (1.8)$$

Mit Hilfe der Schwerpunktschwindigkeit läßt sich die thermische Geschwindigkeit der Teilchen als $\vec{w}_\alpha = \vec{v} - \vec{u}_\alpha$ ausdrücken. Sie beschreibt den mit thermischen Fluktuationen verbundenen Anteil der Teilchengeschwindigkeit. Somit gilt, wie man mit obiger Definition leicht nachrechnet, für den Mittelwert $\langle \vec{w}_\alpha \rangle = 0$. Dies ermöglicht die Definition der Temperatur

$$kT_\alpha = \frac{1}{n_\alpha} \frac{m_\alpha}{3} \int \vec{w}_\alpha^2 f_\alpha(\vec{v}) d^3v \quad (1.9)$$

Man beachte, dass wir damit vorausgesetzt haben, dass in jedem Volumenelement lokal annähernd eine Maxwellverteilung vorliegt (ansonsten ist die so definierte Temperatur nicht identisch mit der aus der Thermodynamik bekannten Temperatur). Allgemeiner ist mit dem quadratischen Moment der thermischen Teilchenbewegung der Drucktensor \mathbf{P} verknüpft.

$$\mathbf{P}_\alpha = m_\alpha \int \vec{w}_\alpha \otimes \vec{w}_\alpha f_\alpha(\vec{v}) d^3v \quad (1.10)$$

wobei $\vec{w}_\alpha \otimes \vec{w}_\alpha$ das dyadische Produkt kennzeichnet. Die Spur (Summe der Diagonalelemente) des Drucktensors entspricht dem skalaren Druck:

$$P_\alpha^{xx} + P_\alpha^{yy} + P_\alpha^{zz} = 3n_\alpha kT_\alpha \quad (1.11)$$

Im thermodynamischen Gleichgewicht sind nur diese Elemente von Null verschieden. Für *isotropen* Druck erhält man das ideale Gasgesetz $p_\alpha = n_\alpha kT_\alpha$.

Schließlich treten bei der Integration des Stoßterms Terme auf, die den Impuls- und Energieaustausch zwischen den Teilchensorten α und β beschreiben. Wegen der Erhaltung von Impuls

und Energie verschwinden die Integrale des Stoßterms über \vec{u}_α , und wir haben nur die Integration über \vec{w}_α zu berücksichtigen.

Der Impulsaustausch führt zur Reibungskraft $\vec{R}_{\alpha\beta}$

$$\vec{R}_{\alpha\beta} = m_\alpha \int \vec{w}_\alpha \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{Sto\ss} d^3 w_\alpha \quad (1.12)$$

Wegen *actio = reactio* ist $\vec{R}_{\alpha\beta} = -\vec{R}_{\beta\alpha}$.

Man gewinnt nun durch Integration der mit v^k multiplizierten kinetischen Gleichung (1.5) Gleichungen im Ortsraum. Mit diesen Gleichungen läßt sich das Plasma wie eine Flüssigkeit beschreiben; man bezeichnet das Verfahren daher auch als *magnetohydrodynamische* (MHD) Beschreibung. Für $k < 2$ ergeben sich die folgenden MHD Gleichungen:

Integration der kinetischen Gleichung ($k = 0$) ergibt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha \vec{u}_\alpha) = 0 \quad (1.13)$$

Sie besagt, daß bei Teilchenzahlerhaltung in einem infinitesimalen Volumen Änderungen der Teilchendichte durch die Divergenz des Teilchenstromes $n_\alpha \vec{u}_\alpha$ bedingt sind.

Integration der mit $m_\alpha \vec{v}$ multiplizierten kinetischen Gleichung (d.h. $k = 1$) ergibt die Kraftgleichung

$$m_\alpha n_\alpha \left(\frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial t} + (\vec{u}_\alpha \cdot \nabla) \vec{u}_\alpha \right) - q_\alpha n_\alpha (\vec{E} + \vec{u}_\alpha \times \vec{B}) - n_\alpha m_\alpha \vec{g} + \nabla \cdot \mathbf{P}_\alpha = \vec{R}_{\alpha\beta} \quad (1.14)$$

Diese Gleichung besagt, daß die Beschleunigung eines Volumenelementes gerade durch die Summe der äußeren Kräfte gegeben ist. In der Hydrodynamik ist sie als Eulergleichung bekannt. In Gl. (1.14) wurde die zeitliche Ableitung im ortsfesten System ausgedrückt. Zeitliche Änderung einer Größe kann somit sowohl durch explizite Zeitabhängigkeit ($\partial/\partial t$), als auch durch Strömen mit der Flüssigkeit ($\vec{u}_\alpha \cdot \nabla$) bewirkt werden. Diese sogenannte *konvektive Ableitung* erhält man auch aus dem totalen Differential:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}_\alpha \cdot \nabla \quad (1.15)$$

Eine Betrachtung der Momentengleichungen zeigt, daß das Gleichungssystem nicht geschlossen ist: In der k -ten Momentengleichung taucht jeweils ein $k + 1$ -tes Moment auf. Um zu einem geschlossenen System zu kommen, muß man daher weitere Annahmen machen. Bricht man z.B. bei $k = 1$ ab, so muß eine Gleichung für den Drucktensor hinzugenommen werden. Dies kann durch die Annahme eines adiabatischen Verhaltens geschehen:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{n^\gamma} \right) = 0 \quad (1.16)$$

wobei γ der Adiabatenkoeffizient ist (z.B. $\gamma = 5/3$ im idealen Gas mit drei Freiheitsgraden).

Für ein Wasserstoffplasma kann man das System der zwei Flüssigkeiten (Ionen und Elektronen) zu einer Flüssigkeit zusammenfassen. Dazu definiert man die Massendichte ρ , die Schwerpunktschwindigkeit \vec{v} und die elektrische Stromdichte \vec{j} gemäß

$$\rho = m_i n_i + m_e n_e \approx m_i n \quad (1.17)$$

$$\vec{v} = \frac{1}{\rho} (m_i n_i \vec{u}_i + m_e n_e \vec{u}_e) \approx \vec{u}_i \quad (1.18)$$

$$\vec{j} = en(\vec{u}_i - \vec{u}_e) \quad (1.19)$$

wobei wir die Quasineutralität ($n_i = n_e = n$) und $m_e \ll m_i$ ausgenutzt haben.

In diesem Einflüssigkeitsmodell ergibt sich die Kontinuitätsgleichung als

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.20)$$

Addition der Kraftgleichungen für Elektronen und Ionen ergibt

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla \cdot \mathbf{P} + \vec{j} \times \vec{B} + \rho \vec{g} \quad (1.21)$$

mit $\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_e = \mathbf{P}$. Wegen $\vec{R}_{ei} = -\vec{R}_{ie}$ taucht die Reibung nicht mehr auf.

Eine weitere Gleichung ergibt sich, wenn man die Kraftgleichung der Elektronen durch die Einflüssigkeitsvariablen ausdrückt:

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \frac{1}{\sigma} \vec{j} + \frac{1}{en} (\vec{j} \times \vec{B} - \nabla p_e) - m_e/e \frac{d\vec{v}_e}{dt} \quad (1.22)$$

wobei wir nur den isotropen Anteil des Elektronendrucktensors berücksichtigt haben. Die Reibungskraft \vec{R}_{ei} führt zum elektrischen Widerstand; das resultierende elektrische Feld wurde über die Beziehung $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ eingeführt. Die Gleichung (1.22) ist die Bestimmungsgleichung für das elektrische Feld im Plasma, sie wird daher als *verallgemeinertes Ohmsches Gesetz* bezeichnet. Man beachte, dass das Ohmsche Gesetz nur im Falle der Quasineutralität von \vec{g} unabhängig ist. Zusammen mit den Maxwellgleichungen (1.2) und (1.3) für \vec{E} und \vec{B} , dem allgemeinen Gravitationsgesetz für $\nabla \cdot \vec{g} = -4\pi\rho$ und der Adiabatangleichung (1.16) bilden die Gleichungen (1.20) bis (1.22) das System der *Einflüssigkeitsgleichungen* der MHD. Mit ihm kann das makroskopische Verhalten eines Plasmas beschrieben werden.

Wir müssen allerdings beachten, dass die MHD als Flüssigkeitstheorie nur anwendbar ist, wenn einige Voraussetzungen erfüllt sind:

- Eine Beschreibung durch eine Kontinuumstheorie ist nur sinnvoll, wenn sich im Volumenelement viele Teilchen befinden. Dies bedeutet, dass der Gyroradius r_L klein gegen die Systemlänge L sein muss:

$$r_L = \frac{\sqrt{mkT}}{qB} \ll L \quad (1.23)$$

In typischen Fusionsanwendungen ist der Ionengyroradius von der Grössenordnung $r_L \approx \text{mm}$, während die typische Ortsskala von der Grössenordnung $L \approx \text{m}$ ist. Dieses Kriterium ist dann also erfüllt.

- Die Definition einer lokalen Temperatur setzt voraus, dass im Volumenelement genug Stösse stattfinden, um eine lokale Maxwellverteilung zu garantieren. Dies bedeutet, dass die Zeit zwischen zwei Stössen τ_{Stoss} kurz gegen die typische Zeitskala τ des Experiments ist:

$$\tau_{\text{Stoss}} \sim T^{3/2}/n \ll \tau \quad (1.24)$$

und dass die freie Weglänge der Teilchen λ_{mfp} klein gegen die Systemabmessung ist

$$\lambda_{mfp} \sim T^2/n \ll L \quad (1.25)$$

Diese Forderungen sind nicht so einfach zu erfüllen. In einem typischen Fusionsplasma, z.B. im Tokamak, ist die freie Weglänge längs der Magnetfeldlinien von der Grössenordnung $\lambda_{mfp} \approx \text{km}$, so dass die Teilchen zwischen zwei Stössen das System viele Male durchqueren. Die MHD beschreibt die Dynamik längs der Feldlinien i.A. nicht gut und man muss hier die kinetische Theorie verwenden. Dies ist in Fusionsplasmen vor allem bei der Beschreibung von Turbulenz wichtig. Senkrecht zu den Feldlinien ist die freie Weglänge aber durch den Larmorradius bestimmt und somit die MHD gut anwendbar. Viele der im folgenden behandelten MHD-Instabilitäten haben die Eigenschaft, dass ihre Phase längs des Magnetfelds konstant ist, da so keine Energie zum Verbiegen der Gleichgewichtsfeldlinien aufgewendet werden muss; auch hier ist die MHD eine gute Beschreibung.

- Im Ohmschen Gesetz kann man die Terme auf der rechten Seite von Glg. (1.22) vernachlässigen, wenn die elektrische Leitfähigkeit gross genug ist. Diese Forderung bedeutet im wesentlichen, dass die Stromdiffusionszeit τ_R gross gegen die typische Systemzeit τ ist.

$$\tau_R \sim \mu_0 \sigma \sim T^{3/2} \gg \tau \quad (1.26)$$

Dieses Kriterium wird im Detail in Kapitel 5 besprochen. Ist es erfüllt, spricht man von idealer MHD. In der idealen MHD ist der magnetische Fluss bei der Bewegung erhalten; darauf wollen wir im Folgenden eingehen.

1.2 Konsequenzen der MHD-Gleichungen

1.2.1 Der 'eingefrorene Fluß'

Mit Hilfe der MHD Gleichungen läßt sich für den Fall unendlicher Leitfähigkeit ($\sigma \rightarrow \infty$, 'ideale MHD') ein wichtiger Satz beweisen. Das Ohmsche Gesetz lautet dann

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \frac{1}{en_e} (\vec{j} \times \vec{B} - \vec{\nabla} p_e) \quad (1.27)$$

Betrachtet man eine Schleife C , die gegen den Plasmaschwerpunkt mit der Geschwindigkeit \vec{u} durch das Plasma bewegt wird, so erhält man für die Änderung des magnetischen Flusses $\Psi = \int \vec{B} d\vec{A}$ durch die Schleife

$$\frac{d\Psi}{dt} = \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{A} - \oint \vec{u} \times \vec{B} d\vec{\ell} \quad (1.28)$$

Der erste Term auf der rechten Seite ist ein Flächenintegral über die Schleife und berücksichtigt die Flußänderung auf Grund der Änderung des B-Feldes, der zweite ein Umlaufintegral, das die Flußänderung auf Grund der Bewegung der Schleife senkrecht zum (inhomogenen) Magnetfeld berücksichtigt. Ersetzt man nun in Gl. (1.28) $\partial \vec{B} / \partial t$ nach dem Faradayschen Gesetz durch $-\vec{\nabla} \times \vec{E}$ und benutzt für E das verallgemeinerte Ohmsche Gesetz (1.27), so kann man den ersten Summanden auf der rechten Seite von (1.28) mit dem Stokeschen Satz in ein Umlaufintegral umwandeln und erhält schließlich

$$\frac{d\Psi}{dt} = \oint (\vec{v} - \frac{1}{en_e} \vec{j} - \vec{u}) \times \vec{B} d\vec{\ell} \quad (1.29)$$

Dies bedeutet nun aber, daß der magnetische Fluß durch die Schleife konstant bleibt, wenn man diese mit der Geschwindigkeit

$$\vec{u} = \vec{v} - \frac{1}{en_e} \vec{j} = \vec{v}_i - (\vec{v}_i - \vec{v}_e) = \vec{v}_e \quad (1.30)$$

bewegt. Der Umkehrschluß liefert dann, daß sich eine bestimmte Feldlinientopologie mit der Geschwindigkeit \vec{u} bewegt. Diese ist nun gerade die Elektronengeschwindigkeit; man spricht daher davon, daß die Magnetfeldlinien im Elektronengas 'eingefroren' seien.

Dieser Satz hat Konsequenzen für die in der idealen MHD zulässigen Bewegungen des Plasmas: Nur solche Strömungen, bei denen sich die Topologie der Feldlinien nicht ändert, sind zugelassen. Also kann sich in der idealen MHD eine Plasmasäule zwar kontrahieren, nicht aber abreißen. Ein Beispiel zeigt Fig. 1.1. Zur Beschreibung des Abreißens ist die Berücksichtigung der Resistivität notwendig: nur dann kann sich die Topologie ändern ('Rekonnektion' von Feldlinien). Darauf werden wir ausführlich bei der Behandlung der MHD-Instabilitäten zurückkommen.

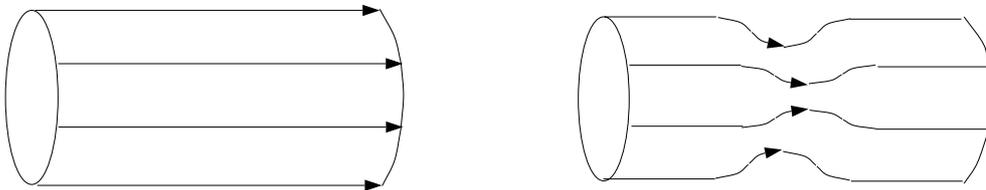


Abbildung 1.1: Kontraktion einer Plasmasäule unter Flußerhaltung.

Bei der Kontraktion erhöht sich das Magnetfeld wegen der Flußerhaltung: Verringert sich die Querschnittsfläche von F_1 zu F_2 , so gilt ungefähr $B_2 = B_1 F_1 / F_2$. Dieser Mechanismus wird auch für die extrem hohen Magnetfelder (bis zu 10^8 T) in den Neutronensternen verantwortlich gemacht: Bei der Kontraktion eines Sterns zum Neutronenstern ist der magnetische Fluß innerhalb des Sterns wegen der hohen Temperaturen praktisch eingefroren, das Magnetfeld kann so um mehrere Größenordnungen erhöht werden. Nimmt man z.B. einen Radius von $r_2 = 20$ km für den Neutronenstern und $r_1 = 696000$ km (Sonnenradius) an, so erhöht sich das Magnetfeld um den Faktor $r_1^2 / r_2^2 \approx 10^9$.

In den magnetisierten Plasmen der Fusionsforschung kann man wegen des eingefrorenen Flusses das Konzept der sogenannten Flußröhre einführen: eine geschlossene Röhre, deren Seitenwände durch Magnetfeldlinien aufgespannt werden, nimmt nach obigen Argumenten bei einer Bewegung das eingeschlossene Plasma mit. Da der Fluß einer Röhre erhalten ist, können die Feldlinien einer benachbarten Flußröhre nicht die Oberfläche der Flußröhre durchsetzen (sonst würde sich der eingeschlossene Fluß ändern). Daher kann man Flußröhren zwar miteinander vertauschen, jedoch nur, wenn bei der Bewegung die Röhren sich nicht durchdringen. Somit kann eine Verscherung des Magnetfeldes, d.h. ein Verkippen benachbarter Flußröhren gegeneinander, den Austausch benachbarter Flußröhren wirkungsvoll unterdrücken.

1.2.2 MHD-Gleichgewichte

Eine Anwendung der oben hergeleiteten MHD-Gleichungen besteht in der Berechnung von MHD-Gleichgewichten, d.h. von Konfigurationen, in denen ein Plasma im Kräftegleichgewicht ist. Fordern wir zusätzlich zu $\partial/\partial t \rightarrow 0$ auch noch $\vec{v} = 0$, so verschwindet die linke Seite der Kraftgleichung (1.21), und wir erhalten (für isotropen Druck)

$$\nabla p = \rho \vec{g} + \vec{j} \times \vec{B} \quad (1.31)$$

Ein Druckgradient im Plasma kann also sowohl durch die Gravitations- als auch durch die Lorentzkraft aufrecht erhalten werden. Die Kraftbilanz zwischen Druckgradient und Gravitation ist uns bereits aus der Hydrodynamik bekannt. Ein Beispiel ist das Gleichgewicht von Luftschichten in der Atmosphäre. Hier variiert der Druck nur in vertikale (z -)Richtung und es gilt

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -mng = -m \frac{p}{kT} g \quad (1.32)$$

Hier tritt das Problem auf, dass i.A. $T = T(z)$ gilt und eine einfache Integration der Gleichung nicht möglich ist, ohne eine Zustandsgleichung $p(T)$ zu kennen. Beschränken wir uns jedoch nur auf die nähere Atmosphäre (bis ca. 10 km Höhe), so ist $T = \text{const.}$ eine vernünftige Annahme (die Temperatur der Atmosphäre schwankt in diesem Höhenbereich zwischen ca. 300 K am Boden und ca. 220-230 K in 10 km Höhe). Damit kann Glg. (1.32) direkt aufintegriert werden und es ergibt sich

$$p(z) = p_0 e^{-z/\Lambda} \quad (1.33)$$

mit der Skalenlänge $\Lambda = kT/(mg)$. Für $kT = 1/40$ eV und mit der mittleren Molekülmasse von Luft ($M = 28.8$), erhalten wir $\Lambda \approx 8.5$ km, was ungefähr der Höhe der höchsten Berge der Erde entspricht. Glg. (1.33) wird auch als barometrische Höhenformel bezeichnet.

Grundsätzlich andere Verhältnisse treten beim Einschluss heisser Plasmen auf der Erde auf. Hier ist die Gravitationskraft zu vernachlässigen und der Einschluss wird durch die $\vec{j} \times \vec{B}$ -Kraft bestimmt. Dies bedeutet, daß im Gleichgewicht ein Strom senkrecht zu den magnetischen Feldlinien die durch den kinetischen Druck auf das Volumenelement ausgeübte Kraft bilanziert.

Mit Hilfe des Ampèreschen Gesetzes $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ kann diese Gleichung umgeformt werden:

$$\nabla p = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} \nabla B - \nabla \left(\frac{B^2}{2} \right)) \rightarrow \nabla_{\perp} \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{B^2}{\mu_0 R_c} \vec{e}_{R_c} = 0 \quad (1.34)$$

Dabei ist R_c der Krümmungsradius (Radius des lokalen Schmiegekreises) des Magnetfeldes. Danach kann das Magnetfeld auf zweierlei Art kinetischen Druck bilanzieren: Senkrecht zu den Magnetfeldlinien wird der *magnetische Druck* $B^2/2\mu_0$ ausgeübt. Der zweite Term beschreibt die *Feldlinienspannung*, d.h. die Auslenkung gerader Feldlinien übt über die Krümmung eine Kraft in Richtung des Krümmungsradius aus.

1.2.3 Alfvén-Wellen

Durch die Vernachlässigung des Verschiebungsstroms im Faradayschen Gesetz haben wir explizit elektromagnetische Wellen in unserem Modell ausgeschlossen. Die MHD Gleichungen beinhalten jedoch einen charakteristischen Typ von Wellen, die nur in magnetisierten Plasmen auftreten. Diese nach ihrem Entdecker benannten Alfvén Wellen wollen wir im folgenden behandeln.

Bei Auslenkung eines Flüssigkeitselementes aus der Gleichgewichtslage senkrecht zum Gleichgewichtsfeld ergibt sich durch die Kraftgleichung eine Kraft auf das Plasma. Unter der Annahme einer kleinen Störung können wir die Kraftgleichung linearisieren. Dabei nehmen wir an, daß die Gleichgewichtsgrößen \vec{B}_0 , p_0 und ρ_0 zeitlich und räumlich konstant sind. Die Geschwindigkeit \vec{v} bestehe nur aus einem Störanteil \vec{v}_1 , der nach Definition senkrecht zu \vec{B}_0 ist. Dann erhält man

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \frac{1}{\mu_0} \left((\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{B}_1 - \nabla (\vec{B}_0 \cdot \vec{B}_1) \right) \quad (1.35)$$

Ausgehend von dieser Gleichung können wir nun zwei prinzipiell unterschiedliche Fälle betrachten:

Kompressionale Alfvén-Wellen

Zunächst untersuchen wir den Fall einer homogenen Kompression von \vec{B}_0 (siehe Fig. 1.2). Dann wird das Gleichgewichtsmagnetfeld nicht gekrümmt (d.h. $\vec{B}_1 \parallel \vec{B}_0$) und es gilt $(\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{B}_1 \rightarrow 0$ und $\nabla (\vec{B}_0 \cdot \vec{B}_1) = \vec{B}_0 \cdot \nabla \vec{B}_1$. Nochmaliges Differenzieren der Kraftgleichung ergibt

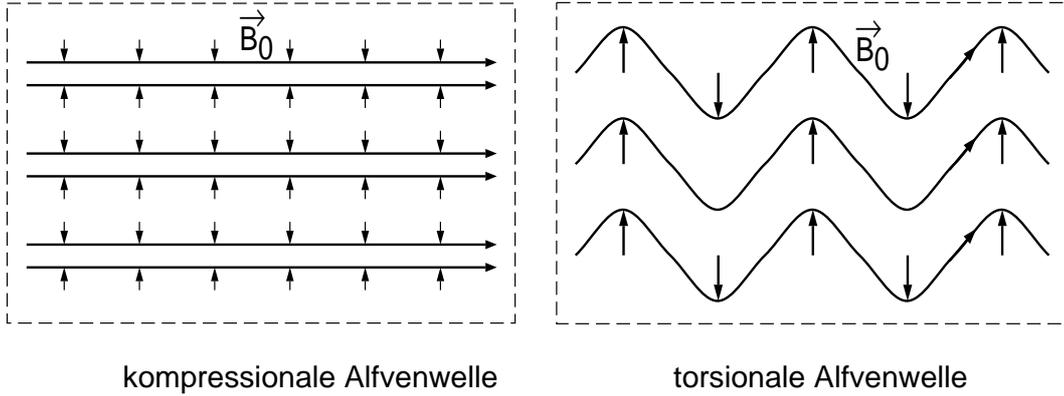


Abbildung 1.2: Zur Herleitung der kompressionalen und der torsionalen Alfvén-Wellen.

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} = -\nabla \frac{\partial p_1}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_0 \cdot \nabla \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \quad (1.36)$$

Um zu einer Gleichung für \vec{v}_1 zu kommen, müssen wir die zeitliche Veränderung von p_1 und \vec{B}_1 durch \vec{v}_1 ausdrücken. Eine Gleichung für p_1 erhalten wir aus dem linearisierten Adiabaten-gesetz

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0 \rightarrow \frac{dp}{dt} - \gamma \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (1.37)$$

Dies kann mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung umgeschrieben werden in

$$\frac{dp}{dt} = -\gamma p \nabla \cdot \vec{v} \rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} = -(\vec{v} \cdot \nabla) p - \gamma p \nabla \cdot \vec{v} \quad (1.38)$$

Da wir angenommen haben, dass die Gleichgewichtsgrößen räumlich konstant sind, bleibt nach Linearisierung

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = -\gamma p_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 \quad (1.39)$$

Demnach wird eine Änderung des kinetischen Druckes durch eine Kompression oder Expansion des Volumenelementes verursacht.

Die Gleichung für \vec{B}_1 erhalten wir aus der Kombination von Faradayschem und Ohmschem Gesetz:

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E}_1 = \nabla \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0) \quad (1.40)$$

Den letzten Ausdruck können wir mit Hilfe einer Vektoridentität umschreiben:

$$\nabla \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0) = (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{v}_1 - (\vec{v}_1 \cdot \nabla) \vec{B}_0 + \vec{v}_1 (\nabla \cdot \vec{B}_1) - \vec{B}_0 (\nabla \cdot \vec{v}_1) \quad (1.41)$$

Auf Grund der Geometrie ist im Falle der Kompression der erste Term Null, der zweite verschwindet wegen $\vec{B}_0 = \text{const}$. Der dritte Term verschwindet wegen $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ in jeder Ordnung. Somit bleibt

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = -\vec{B}_0(\nabla \cdot \vec{v}_1) \quad (1.42)$$

Damit können wir Gl. (1.36) unter der Voraussetzung $\nabla \times \vec{v}_1 = 0$ (dann ist $\nabla(\nabla \cdot \vec{v}_1) = \Delta \vec{v}_1$) wie folgt umschreiben:

$$\frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} = \left(\gamma \frac{p_0}{\rho_0} + \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_0} \right) \Delta \vec{v}_1 \quad (1.43)$$

Dies ist eine Wellengleichung für \vec{v}_1 mit der (nur von den Gleichgewichtsgrößen abhängenden) Phasengeschwindigkeit $v_{ph} = \sqrt{(\gamma p_0 / \rho_0 + B_0^2 / (\mu_0 \rho_0))}$. Es treten zwei Anteile auf: Der erste ist die vom idealen Gas bekannte Schallgeschwindigkeit, mit der sich eine Kompressionswelle longitudinal durch das Gas bewegt. Der zweite Term ist der Beitrag des magnetischen Druckes $B^2 / (2\mu_0)$. Ist im Plasma die Größe β , d.h. das Verhältnis von thermischer zu magnetischer Energie klein, so dominiert der magnetische Anteil und die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist die sogenannte Alfvéngeschwindigkeit

$$v_{ph} = v_A = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}} \quad (1.44)$$

Wir haben es dann mit einer magnetischen Longitudinalwelle ($\vec{k} \parallel \vec{v}_1$) zu tun (sog. kompressive Alfvénwelle).

Torsionale Alfvén-Wellen

Ein zweiter Spezialfall ist die Ausbreitung entlang \vec{B}_0 . Dies kann ohne Kompression geschehen, d.h. $\nabla \cdot \vec{v}_1 = 0$ (siehe Fig. 1.2). Dann folgt wegen (1.39) auch $\partial p / \partial t = 0$ und der Druckbeitrag in Gl. (1.35) verschwindet. In diesem Fall kann sich im idealen Gas keine Welle ausbilden. Im magnetisierten Plasma existiert jedoch die rücktreibende Feldlinienspannung (der Beitrag des magnetischen Drucks verschwindet wegen $\vec{B}_1 \perp \vec{B}_0$). In Gl. (1.41) ist in diesem Fall nur der erste Term auf der rechten Seite ungleich Null und wir erhalten nach nochmaligem zeitlichen Differenzieren aus Gl. (1.35)

$$\frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \rho_0} \left(\vec{B}_0 \cdot \nabla \right)^2 \vec{v}_1 \quad (1.45)$$

Dies ist eine Wellengleichung, wobei die räumliche zweite Ableitung längs des Gleichgewichtsmagnetfeldes zu nehmen ist. Wiederum breitet sich die Welle mit der Alfvéngeschwindigkeit v_A aus, diesmal haben wir es jedoch mit einer Transversalwelle zu tun. Das Gleichgewichtsmagnetfeld schwingt dabei wie eine Saite (d.h. $\vec{k} \perp \vec{v}_1$). Dieser Wellentyp heißt torsionale Alfvénwelle.

Die Alfvéngeschwindigkeit ist die maximale Geschwindigkeit, mit der sich Flüssigkeitselemente in der idealen MHD bewegen können, da hier die Massenträgheit das limitierende Element ist. In den magnetisierten Plasmen der Fusionsforschung liegt die sog. Alfvénzeitskala

$$\tau_A = a/v_A \quad (1.46)$$

im Bereich von 1-10 μ s (a ist eine typische Länge, z.B. der kleine Plasmaradius). Man beachte, daß die Alfvénwellen keine Instabilitäten sind, d.h. nicht mit einer Resonanz verbunden sind. Daher treten die Kopplung an Alfvénwellen in der Praxis oftmals als Dämpfungsmechanismus für MHD-Instabilitäten auf.

Kapitel 2

MHD-Gleichgewicht

In diesem Kapitel wollen wir uns eingehend mit dem Kräftegleichgewicht der idealen MHD beschäftigen. Ein zeitlich stationärer Zustand wird durch die stationäre Kraftgleichung

$$\rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} + \rho \vec{g} \quad (2.1)$$

beschrieben. Beim magnetischen Einschluss wird ein Druckgradient durch Ströme senkrecht zum Magnetfeld bilanziert. Dies begegnet uns vor allem in der Fusionsforschung im Labor. Hier spielt die Gravitationskraft eine untergeordnete Rolle. In astrophysikalischen Anwendungen, wie z.B. im Sterninneren, kann dagegen die Gravitationskraft dominieren. Schliesslich muss für nennenswerte Strömungsgeschwindigkeiten auch die konvektive Ableitung berücksichtigt werden. Dies wird vor allem dann wichtig, wenn die Strömungsgeschwindigkeit in die Nähe der Alfvéngeschwindigkeit kommt. Dann muss zusätzlich zur Kraftgleichung auch noch das ideale Ohmsche Gesetz berücksichtigt werden, da das Plasma in der idealen MHD nur längs der Feldlinien frei strömen kann, während es eine Flussröhre nicht verlassen kann.

2.1 Einschluss durch Gravitation: Gleichgewicht in Sternen

Wir wollen uns nun mit dem Einschluss eines heissen Plasmas durch die Gravitationskraft beschäftigen. Dabei bilanziert die Gravitationskraft den Druckgradient. Allgemein gilt für die Gravitationskraft

$$\nabla \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho \quad (2.2)$$

mit der Gravitationskonstante $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{s}^2 \text{ kg})$. Für Kugelsymmetrie hat \vec{g} nur eine radiale Komponente und Glg. (2.2) kann wie folgt umgeschrieben werden

$$g(r) = -G \frac{M(r)}{r^2} \quad \text{mit} \quad M(r) = 4\pi \int r^2 \rho(r) dr \quad (2.3)$$

Einsetzen in die Kraftgleichung sowie Umschreiben von $M(r)$ in differentieller Form ergibt

$$\frac{dp}{dr} = -\rho(r)G\frac{M(r)}{r^2} \quad (2.4)$$

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (2.5)$$

Diese zwei Differentialgleichungen beschreiben das hydrostatische Kräftegleichgewicht im Sterninneren. Allerdings kann das Gleichungssystem so nicht gelöst werden, da noch eine weitere Gleichung für $p(\rho)$ fehlt. Mit $p = (\rho/m)kT$ kann dies auch in eine Gleichung für $T(\rho)$ umformuliert werden. Es muss also noch die Energietransportgleichung für $T(\rho(r))$ gelöst werden. Diese ist von der Form $dT/dr = \text{Quellen}(\rho(r)) - \text{Senken}(\rho(r))$, wobei die Quelle durch die im Sterninneren ablaufenden Kernfusionsprozesse bestimmt ist, während die Senke durch den Abtransport von Energie gegeben ist. Dieser geschieht im Sterninneren durch Strahlung oder, in den äusseren Zonen, durch Konvektion. Wärmeleitung spielt praktisch keine Rolle.

Es gibt aber eine andere Möglichkeit, sich einen qualitativen Einblick zu verschaffen. Dazu nehmen wir an, dass die Massendichte im Stern vom Zentrum nach aussen exponentiell abfällt:

$$\rho(r) = \rho_0 e^{-\alpha \frac{r}{R}} \quad (2.6)$$

Mit dieser Annahme kann man die Massendichte aufintegrieren und erhält

$$M(r) = 8\pi\rho_0 \left(\frac{R}{\alpha}\right)^3 \left(1 - e^{-\alpha \frac{r}{R}} \left(1 + \alpha \frac{r}{R} + \frac{1}{2} \left(\alpha \frac{r}{R}\right)^2\right)\right) \quad (2.7)$$

Für $r = R$, d.h. an der Sternoberfläche ergibt sich

$$M(R) = 8\pi\rho_0 \left(\frac{R}{\alpha}\right)^3 \left(1 - e^{-\alpha} \left(1 + \alpha + \frac{1}{2}\alpha^2\right)\right) \quad (2.8)$$

Für $\alpha \gg 1$ ist der hintere Ausdruck in der Klammer vernachlässigbar. Diese Annahme bedeutet, dass die Dichte vom Zentrum zum Rand hin um mehr als einen Faktor e abfällt, was sicherlich gut erfüllt ist. Es ergibt sich

$$M_\odot \approx 8\pi\rho_0 \left(\frac{R}{\alpha}\right)^3 \quad (2.9)$$

Nun kann man die Kraftgleichung aufintegrieren:

$$p(r) = -8\pi\rho_0^2 \left(\frac{R}{\alpha}\right)^2 G \int_0^{\alpha \frac{r}{R}} \frac{e^{-x}}{x^2} \left(1 - e^{-x} \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)\right) dx + c \quad (2.10)$$

Dieses Integral lässt sich nicht analytisch lösen. Die Integrationskonstante ergibt sich wie folgt: es gilt $p(r) = F(r) + c$. Aus $p(R) = 0$ und $F(0) = 0$ ergibt sich $p(0) = c$ und damit $p(0) = -F(R)$. Das Integral geht für $\alpha r/R \gg 1$ gegen den konstanten Wert 0.056, sodass sich der Druck im Zentrum angeben lässt:

$$p(0) = 5.6 \times 10^{-2} 8\pi \left(\frac{R}{\alpha}\right)^2 \rho_0^2 G \quad (2.11)$$

und ersetzen von ρ_0 mit Glg. (2.9) führt zu

$$p(0) = 5.6 \times 10^{-2} \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\alpha}{R}\right)^4 M_\odot^2 G \quad (2.12)$$

Wir haben nun einen Ausdruck für die zentralen Werte von ρ und p in Abhängigkeit von α . Unter Annahme eines reinen Wasserstoffplasmas können wir unter Kenntnis der Temperatur im Sonneninneren sowie der Masse und des Radius der Sonne den Parameter α für die Sonne bestimmen. Man findet $\alpha = 8.6$ für $M_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg und $R_\odot = 696000$ km.

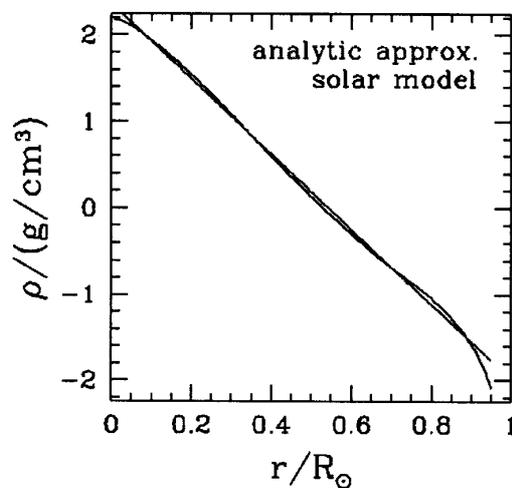


Abbildung 2.1: Verlauf der Massendichte in der Sonne: Vollständiges Sonnenmodell und exponentieller Abfall zeigen eine sehr gute Übereinstimmung.

Diesen Wert kann man mit einer numerischen Rechnung, welche die Energietransportgleichung konsistent löst, vergleichen. Der Vergleich ist in Abb. 2.1 dargestellt. Es zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung; unser Ansatz eines exponentiellen Dichteabfalls mit $\alpha \gg 1$ war also gerechtfertigt.

2.2 Rotation von magnetisierten Plasmen

Während das Magnetfeld beim Einschluss in Sternen keine entscheidende Rolle in der Kraftbilanz spielt, ist es für die Rotation und die Drehimpulsbilanz von entscheidender Bedeutung. Wegen des eingefrorenen Flusses ist die von Sternen ausströmende Masse an die Feldlinien gebunden und das Abströmen hat daher eine Rückwirkung auf die Sternrotation. Dies wollen wir im folgenden näher untersuchen.

2.2.1 Isorotation

Man betrachte einen differentiell rotierenden ($\vec{v} = r\Omega\vec{e}_\phi$ in Zylinderkoordinaten) ideal leitfähigen Körper, etwa einen Stern, mit Magnetfeld ($\vec{B} = B_r\vec{e}_r + B_z\vec{e}_z$) im Gleichgewicht. Gesucht ist eine stationäre Lösung. Im axialsymmetrischen Fall muss also gelten

$$\begin{aligned}\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) &= 0 = \left(\frac{\partial}{\partial z}(r\Omega B_z) + \frac{\partial}{\partial r}(r\Omega B_r) \right) \vec{e}_\phi \\ &= r\Omega \frac{\partial B_z}{\partial z} + rB_z \frac{\partial \Omega}{\partial z} + \Omega B_r + r\Omega \frac{\partial B_r}{\partial r} + rB_r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \\ &= r \left(B_z \frac{\partial \Omega}{\partial z} + B_r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)\end{aligned}\quad (2.13)$$

wobei in der letzten Gleichung die Divergenzfreiheit des Magnetfelds benutzt wurde:

$$r\Omega \nabla \cdot \vec{B} = 0 = \Omega \frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + r\Omega \frac{\partial B_z}{\partial z}.\quad (2.14)$$

Glg.(2.13) läßt sich aber auch schreiben als

$$\vec{B} \cdot \nabla \Omega = 0.\quad (2.15)$$

Die Vektoren \vec{B} und $\nabla \Omega$ stehen also senkrecht aufeinander, d.h. dass alle Feldlinien für sich starr aber nicht notwendig alle mit derselben Winkelgeschwindigkeit rotieren. Es gibt also in der idealen MHD kein 'Aufspulen' von Feldlinien. Diese Verallgemeinerung der starren Rotation heisst Isorotation.

2.2.2 Drehimpulsverlust durch Sternwind

Eine wichtige Anwendung der Isorotation begegnet uns beim Drehimpulsverlust durch Sternwind, d.h. von der Sternoberfläche abströmende Masse. Wegen des eingefrorenen Flusses übt diese eine Kraft auf die vom Stern ausgehenden Feldlinien aus und verformt diese so, dass sie nicht mehr rein radial verlaufen. Dadurch wird die Masse einerseits wie in einer Zentrifuge radial beschleunigt, andererseits beginnt sie, sich relativ zur Winkelgeschwindigkeit des Sterns zu bewegen (folgt dabei aber noch immer den Feldlinien). Die Verhältnisse sind schematisch in Fig. 2.2 dargestellt.

Man nehme an, dass sich ein Stern aus einer Gaswolke mit der Winkelgeschwindigkeit Ω_0 , der Massendichte ρ_0 , der Masse M und dem Radius R_0 infolge sphärisch-symmetrischer homogener Kontraktion bilde. Drehimpulserhaltung ($J \sim MR^2\Omega$) besagt, dass die Winkelgeschwindigkeit Ω des kollabierenden Systems in Abhängigkeit von seinem Radius R sich ergibt zu

$$\Omega = \Omega_0 \frac{R_0^2}{R^2}.\quad (2.16)$$

Während des Kollaps wächst die Winkelgeschwindigkeit also gemäß $\Omega \sim 1/R^2$ drastisch an. Wird ein kritischer Wert Ω_c erreicht, löst sich durch die Zentrifugalkraft Materie ab. Im kritischen Gleichgewichtszustand muss die Zentrifugalkraft gerade durch die Gravitationskraft kompensiert werden (Keplerrotation):

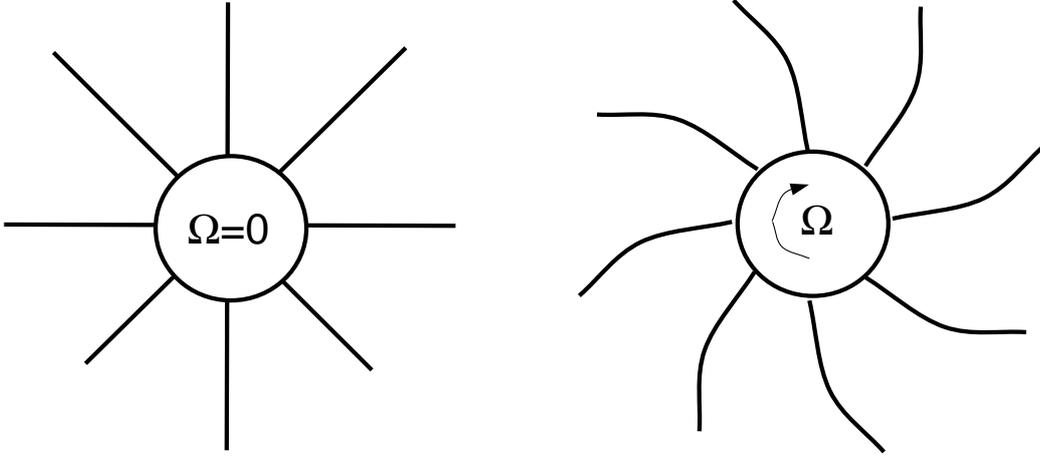


Abbildung 2.2: Drehimpulsverlust durch Sternwind: Abströmende Materie folgt den Feldlinien und übt bei Rotation des Sterns ($\Omega \neq 0$, rechtes Bild) über die Feldlinienspannung ein Drehmoment auf die Oberfläche aus.

$$R\Omega_c^2 = \frac{GM}{R^2} \quad (2.17)$$

Es gilt also $\Omega_c \sim 1/R^{3/2}$. Man würde hieraus erwarten, dass Sterne so schnell rotieren wie es Ω_c erlaubt. Das widerspricht aber der Beobachtung. Unsere Sonne hat beispielsweise einen Rotationsgeschwindigkeit von lediglich $\Omega = 0.01\Omega_c = 3 \cdot 10^{-6} s^{-1}$ (ca. 26 Tage an der Oberfläche) und die Kraftbilanz ist somit durch den Druckgradient und nicht die Zentrifugalkraft dominiert. Sterne können also offensichtlich während der Kontraktionsphase Drehimpuls verlieren. Strömt von einem mit Ω zur Vereinfachung starr rotierenden Stern mit Magnetfeld Materie aus, zwingt das Feld bis zu einer Distanz, in der die magnetische Energiedichte dazu nicht mehr hinreicht, die Materie auf die Winkelgeschwindigkeit Ω und überträgt so Drehimpuls auf die Materie. Die ausströmende Materie verbiegt die Feldlinien in einem der Rotation entgegengesetztem Sinne. Die so erzeugten magnetischen Spannungen üben ein Drehmoment auf den Stern aus; die Sternrotation verlangsamt sich. 1kg Materie, die in einer Entfernung L vom Magnetfeld entkoppelt, trägt den Drehimpuls $D = L^2\Omega$ mit sich fort. Verliert der Stern mit Radius R pro Sekunde die Masse \dot{M} , gilt

$$\frac{d}{dt} (KMR^2\Omega) = L^2\Omega\dot{M} \quad (2.18)$$

wobei der Faktor K die Geometrie des Körpers in dem Trägheitsmoment berücksichtigt (z.B. $K = 2/5$ für sphärische Symmetrie), bzw. nach Division durch $MR^2\Omega$

$$K \frac{\dot{\Omega}}{\Omega} = \left(\frac{L^2}{R^2} - K \right) \frac{\dot{M}}{M} \approx \frac{L^2}{R^2} \frac{\dot{M}}{M} \quad (2.19)$$

wobei der Punkt die zeitliche Ableitung kennzeichnet. Erfolgt eine Abkopplung der Materie vom Magnetfeld z.B. in einer Entfernung von etwa hundert Sternradien, verringert sich die Winkelgeschwindigkeit des Sterns bereits um eine Grössenordnung, wenn der Massenverlust lediglich 10^{-3} seiner Masse M beträgt.

In welcher Distanz kommt es aber wirklich zu einer Entkopplung der ausströmenden Materie von dem Magnetfeld? Zu einer idealisierten Abschätzung gelangt man wie folgt. Wir nehmen an: Das System sei in einem stationären, axialsymmetrischen ($\partial/\partial\phi = 0$ in einem sphärischen Koordinatensystem) Gleichgewicht und in der Äquatorebene bei $\theta = \pi/2$ gelte $B_\theta = 0$ und $\partial/\partial\theta = 0$. Die Rotation des Systems Stern und Magnetfeld sei starr, d.h. $\Omega = \text{const}$. Die Materie ströme so, dass $v_\theta = 0$.

Stationarität fordert Verschwinden aller Zeitableitungen. Zur Bestimmung der Felder und der Rotation müssen die Bewegungsgleichung und das Ohmsche Gesetz im stationären Zustand verwendet werden. Die ϕ -Komponente der stationären Bewegungsgleichung liefert

$$\rho v_r \frac{d}{dr}(r v_\phi) = \frac{1}{\mu_0} B_r \frac{d}{dr}(r B_\phi) \quad (2.20)$$

wobei hier wegen der im Gleichgewicht nicht verschwindenden Strömungsgeschwindigkeit der konvektive Teil der Ableitung $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$ berücksichtigt werden musste. Zudem werden die Kontinuitätsgleichung und die Divergenzfreiheit des Magnetfelds benötigt. Sie ergeben

$$\rho v_r r^2 = \text{const.} \quad (2.21)$$

und

$$r^2 B_r = \text{const.} \quad (2.22)$$

Integration von Glg. (2.20) ergibt mit der Konstanten (s. Glg. (2.21) und (2.22)) $C = B_r/(\mu_0 \rho v_r)$ und der Integrationskonstanten D

$$r v_\phi = C r B_\phi + D. \quad (2.23)$$

Multiplikation von Glg.(2.23) mit ρv_r ergibt an der Sternoberfläche ($r = R$)

$$\rho_0 v_{r0} v_{\phi 0} R - \frac{1}{\mu_0} B_{r0} B_{\phi 0} R = \rho_0 v_{r0} D. \quad (2.24)$$

Der erste Term beschreibt den Drehimpulsverlust des Sterns pro Zeit- und Flächeneinheit, der zweite das Drehmoment, das das Feld pro Flächeneinheit auf die Sternoberfläche ausübt. Die linke Seite von Glg. (2.24) stellt mithin den gesamten Drehimpulsverlust des Sterns pro Zeit- und Flächeneinheit dar. Also ist D der Drehimpulsverlust pro kg Sternmaterie, der oben mit $D = L^2 \Omega$ angesetzt wurde. Die ϕ -Komponente der Geschwindigkeit berechnet sich wie folgt: Im Gleichgewicht folgt aus dem Faraday und dem Ohmschen Gesetz

$$\nabla \times \vec{E} = -\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r(v_r B_\phi - v_\phi B_r)) = 0. \quad (2.25)$$

Gilt an der Oberfläche $v_r B_\phi \ll v_\phi B_r$ (d.h. die ursprüngliche Ausströmgeschwindigkeit ist klein gegen die Rotationsgeschwindigkeit an der Oberfläche und die Feldlinien treten nahezu radial aus), ergibt sich nach Integration von Glg. (2.25) an der Oberfläche

$$rv_r B_\phi - rv_\phi B_r = -\Omega R^2 B_{r0} \quad (2.26)$$

mit dem Wert B_{r0} der radialen Magnetfeldkomponente an der Oberfläche.

Aus Glg.(2.26) folgt unter Berücksichtigung von Glg.(2.22)

$$v_r B_\phi = (v_\phi - r\Omega) B_r \quad (2.27)$$

Diese Gleichung besagt, dass ein Volumenelement genau dann der Feldlinie entlang strömt, wenn im mit Ω rotierenden System sein Geschwindigkeitsvektor in Richtung der Feldlinie zeigt, d.h. das Verhältnis von radialer und azimuthaler Komponente von \vec{B} und \vec{v} sind gleich, wenn man mit dem Stern rotiert.

Glg. (2.24) gilt natürlich nicht nur an der Oberfläche und so erhält man für v_ϕ

$$v_\phi = \frac{B_r B_\phi}{\mu_0 \rho v_r} + \frac{L^2 \Omega}{r} = \frac{1}{M_A^2} (v_\phi - r\Omega) + \frac{L^2 \Omega}{r} \quad (2.28)$$

wobei Glg.(2.27) und die Definition der Alfvén-Machzahl $M_A^2 = v_r^2/v_A^2$ benutzt wurden, bzw.

$$v_\phi = \frac{M_A^2 \frac{L^2}{r^2} - 1}{M_A^2 - 1} r\Omega. \quad (2.29)$$

Diese Gleichung beschreibt, wie die Materie längs der Feldlinie strömt. Dabei wird es wegen der zunehmenden Verzerrung der Feldlinie in azimuthaler Richtung für die Materie immer leichter, eine von der azimuthalen Rotationsgeschwindigkeit der Feldlinie abweichende Geschwindigkeit zu haben und trotzdem mit der Feldlinie zu rotieren (man beachte, dass das Strömen entlang der Feldlinie keinen Einfluß auf das Ohmsche Gesetz hat).

Gleichung 2.29 ist singular für $M_A = 1$. Um eine reguläre Geschwindigkeit zu garantieren, muss gelten $L = r_A$ wobei r_A der Radius ist, bei dem die Radialkomponente der Geschwindigkeit des Sternwinds gleich der lokalen Alfvén-Geschwindigkeit ist.

Dieses Ergebnis begegnet uns häufiger in der idealen MHD: Die Kraftgleichung kann im Allgemeinen nur für $M_A \leq 1$ erfüllt werden; für Strömungsgeschwindigkeiten, die die Alfvéngeschwindigkeit übersteigen, reicht die Magnetfeldenergie i.A. nicht aus, um die Kraftbilanz zu gewährleisten. In unserem Sonnensystem ist $M_A \approx 10$ bei 1 AU und $L = r_A \approx 50R$.

2.2.3 Pulsar-Elektrodynamik

Ein weiteres Beispiel für ein Gleichgewicht mit nichtverschwindender Strömungsgeschwindigkeit stellt die Rotation eines Neutronensterns dar. Wie wir im folgenden sehen werden, entsteht hier im Inneren des rotierenden Körpers ein elektrisches Feld, das gemäß dem Ohmschen

Gesetz der idealen MHD keine Komponente entlang des magnetischen Felds hat, während außerhalb des ideal leitfähigen Sterns das elektrische Feld eine Komponente längs des Magnetfelds hat und somit Teilchen, die entlang des Magnetfelds zur Oberfläche strömen, beschleunigen kann.

Der Neutronenstern mit Radius R rotiere mit Ω und besitze ein eingefrorenes Dipol-Magnetfeld. Wegen $\nabla \times \vec{B} = 0$ im Aussenraum kann dieses Feld durch ein skalares Potential, welches der Laplacegleichung $\nabla \Phi = 0$ genügt, beschrieben werden. In Kugelkoordinaten ist eine solche Lösung allgemein gegeben durch

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left(c_{\ell m}^1 r^{\ell} + \frac{c_{\ell m}^2}{r^{\ell+1}} \right) Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) \quad (2.30)$$

wobei $Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$ die Kugelflächenfunktion darstellt. Wegen der Symmetrie unseres Problems in φ ist $m = 0$ und die Kugelflächenfunktionen werden zu Kugelfunktionen. Im Aussenraum ist wegen der zu fordenden Endlichkeit der Lösung $c_{\ell m}^1 = 0$ und für das Potential des magnetischen Dipols gilt $\Phi \propto \cos\theta/r^2$ und das Feld ergibt sich zu

$$\vec{B} = \frac{B_0 R^3}{r^3} \left(\cos\theta \vec{e}_r + \frac{1}{2} \sin\theta \vec{e}_{\theta} \right) \quad (2.31)$$

wobei B_0 die Feldstärke am Pol ($\theta = 0, r = R$) ist. Die Geschwindigkeit im Stern ist $\vec{v} = r\Omega \sin\theta \vec{e}_{\varphi}$. Im Innern des Sterns scheint einem ruhenden Beobachter ein elektrisches Feld induziert

$$\vec{E}_i = -\vec{v} \times \vec{B} = \frac{B_0 R^3 \Omega}{r^2} \left(\frac{1}{2} \sin^2\theta \vec{e}_r - \sin\theta \cos\theta \vec{e}_{\theta} \right). \quad (2.32)$$

Ist der Aussenraum ein Vakuum, so muss das elektrische Feld dort durch ein Potentialfeld mit stetiger Tangentialkomponente fortgesetzt werden. Für das elektrische Potential gilt, analog zum magnetischen Feld im Vakuum, dass es der Laplacegleichung genügen muss. Die Winkelabhängigkeit der θ -Komponente von E an der Oberfläche wird vom folgenden Term der Multipolentwicklung (2.30) geliefert:

$$\Phi_a = C \frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3} \quad (2.33)$$

wobei die Stetigkeit von E_{θ} garantiert ist für $C = -1/6B_0R^5\Omega$. Das elektrische Feld im Aussenraum ergibt sich so zu

$$\vec{E}_a = -B_0 R^5 \Omega \left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{2r^4} \vec{e}_r + \frac{\sin\theta \cos\theta}{r^4} \vec{e}_{\theta} \right). \quad (2.34)$$

Die Normalkomponente ist unstetig und führt zu der Oberflächenladung

$$\sigma_{el} = \epsilon_0 (E_{ar} - E_{ir}) = -\epsilon_0 B_0 R \Omega \cos^2\theta. \quad (2.35)$$

Während im Innern des Neutronensternes das feldlinienparallele elektrische Feld verschwindet, errechnet man für den Aussenraum

$$\vec{E}_a \cdot \vec{B} = -B_0^2 R \Omega \frac{R^7}{r^7} \cos^3 \theta. \quad (2.36)$$

Auf der Sternoberfläche spüren geladene Teilchen der Masse m und Ladung e also eine elektrische Kraft in Richtung des Magnetfelds und werden mit $b = e\vec{E}_a \cdot \vec{B}/m|B|$ beschleunigt. In Polnähe ($\theta \rightarrow 0$, $r \rightarrow R$, $|B| \rightarrow B_0$) berechnet sich das Verhältnis dieser Beschleunigung zu der Schwerebeschleunigung $g = GM/R^2$ nach

$$\frac{b}{g} = -\frac{eB_0 R^3 \Omega}{mMG} \approx \frac{t_{ff}^2}{t_{rot}} \omega_G \quad (2.37)$$

mit der Frei-Fall-Zeit $t_{ff} = \sqrt{R^3/GM}$, der Rotationsperiode des Neutronensterns $t_{rot} = 2\pi/\Omega$ und der Gyrationfrequenz eines Elektrons $\omega_G = eB_0/m$. Für Pulsare mit $t_{rot} = 1$ s, Radien von $R = 10^4$ m, Massen von $M = 10^{30}$ kg und Oberflächenmagnetfeldern von $B_0 = 10^8$ T ergibt sich für Elektronen $b/g \approx 10^{11}$!!.

2.3 Magnetischer Einschluss in Fusionsplasmen

Grundlage der kontrollierten Kernfusion ist der Einschluß eines heißen ($T \approx 10$ keV) Wasserstoffplasmas für hinreichend lange Zeit, um Fusionsreaktionen zu ermöglichen. Eine Methode ist der Einschluß im Magnetfeld. Dieser wird durch die MHD-Gleichungen beschrieben. Im folgenden wollen wir Beispiele dazu untersuchen.

2.3.1 Der z -Pinch

Wir wollen für einfache lineare Anordnungen MHD-Gleichgewichte berechnen. Ein Beispiel für eine solche Anordnung ist der sog. z -Pinch, d.h. ein zylindrisches Plasma, an dessen Enden eine Spannung anliegt. Dadurch fließt ein Strom j_z . Dieser erzeugt ein Magnetfeld B_θ ; die Kraft $\vec{j}_z \times \vec{B}_\theta$ bilanziert den radialen Druckgradienten dp/dr . Die Verhältnisse veranschaulicht Fig. 2.3.

Das Ampèresche Gesetz liefert die θ -Komponente des Magnetfelds:

$$\frac{1}{\mu_0 r} \frac{d}{dr}(rB_\theta) = j_z \quad (2.38)$$

Die Kraftgleichung kann damit wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{dp}{dr} = -j_z B_\theta = -\frac{1}{\mu_0 r} B_\theta \frac{d}{dr}(rB_\theta) = -\frac{B_\theta^2}{\mu_0 r} - \frac{1}{2\mu_0} \frac{dB_\theta^2}{dr} \quad (2.39)$$

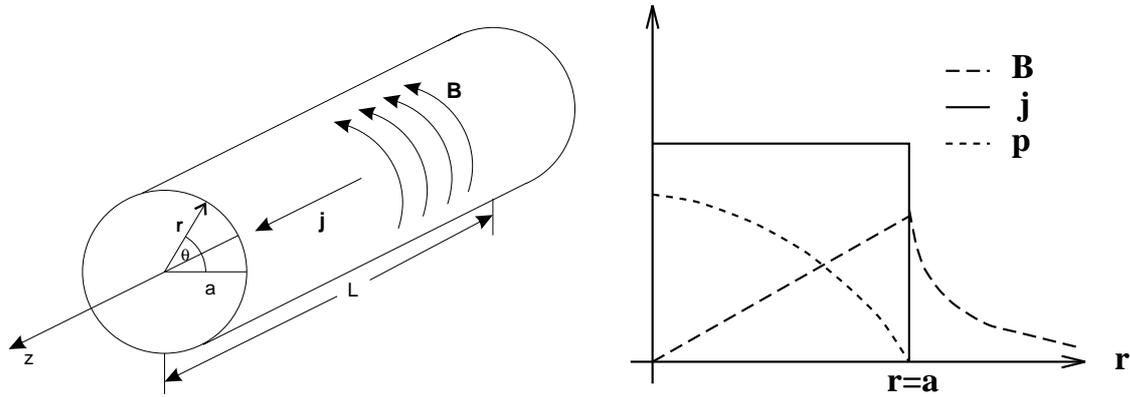


Abbildung 2.3: Schematische Anordnung des z-Pinches (links) und typische Profile.

Im z-Pinch wird also der Plasmadruck sowohl durch magnetischen Druck als auch durch Feldlinienspannung (im Zylinder entspricht r gerade dem Krümmungsradius) balanziert. Spezifiziert man ein Stromprofil, so kann man mit den Gleichungen (2.38) und (2.39) die Profile von B_θ und p berechnen. Für den Fall einer konstanten Stromdichte $j_z = I_p/(\pi a^2)$ (a ist der Plasmaradius) ergeben sich die in Fig. 2.3 dargestellten Profile:

$$B_\theta(r) = \frac{\mu_0 I_p}{2\pi a^2} r \quad \text{falls } r \leq a \quad (2.40)$$

$$B_\theta(r) = \frac{\mu_0 I_p}{2\pi r} \quad \text{falls } r > a \quad (2.41)$$

$$p = \frac{\mu_0 I_p^2}{4\pi^2 a^2} \left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) \quad (2.42)$$

Der Druck im Plasma ist also experimentell durch den Wert des Plasmastroms I_p festgelegt. Die Effizienz des Einschlusses läßt sich durch die dimensionslose Größe β , das Verhältnis von gemitteltem kinetischem Druck p und magnetischem Druck $B^2/(2\mu_0)$, beschreiben:

$$\beta_\theta = \frac{2\mu_0 \langle p \rangle}{B_\theta^2(a)} \quad (2.43)$$

Diese Größe ist in der magnetischen Fusion ein Maß für den Erfolg einer Einschlußkonfiguration, da der kinetische Druck im wesentlichen die Fusionsleistung bestimmt, während der magnetische Druck über das extern zu erzeugende Magnetfeld die Kosten der Anlage dominiert.

Für den z-Pinch ergibt sich $\beta_\theta = 1$, d.h. kinetischer und magnetischer Druck sind gleich. In der Praxis zeigt sich jedoch, daß der z-Pinch eine instabile Konfiguration ist. Die Plasmasäule kontrahiert sich und reißt innerhalb kurzer Zeit ab. Dies kann leicht eingesehen werden: bei einer flußerhaltenden Kontraktion wie in Fig. 1.1 dargestellt bleibt der Plasmastrom konstant, wegen der kleineren Fläche im kontrahierten Gebiet steigt jedoch das Magnetfeld und damit die

Kraft auf das Volumenelement. Der kinetische Druck kann längs der Feldlinien entweichen, die Störung erzeugt somit eine Kraft, welche der Anfangsstörung parallel ist; im Gegensatz zur Alfvénwelle (bei der die erzeugte Kraft rücktreibend ist) haben wir es hier mit einer Instabilität (sog. Pinch-Instabilität) zu tun.

Dieser Instabilität kann durch ein extern erzeugtes axiales Feld B_z entgegengewirkt werden. Die Krümmung des z -Feldes bei der Kontraktion erzeugt eine entgegengerichtete Kraft, welche stabilisierend wirkt. Man gelangt so zum *Screw-Pinch*.

2.3.2 Der Screw-Pinch

Im Screw-Pinch führt die Addition von B_θ und B_z zu helikal verschraubten Feldlinien. Eine solche Konfiguration ist in Fig. 2.4 dargestellt. Den Übergang zum Tokamak, d.h. in toroidale Geometrie, kann man sich in erster Näherung durch Einführen einer Periodizität in z mit Periode $2\pi R_0$ vorstellen. Dann entspricht R_0 dem großen Radius des Torus, und die Koordinate z geht in den toroidalen Winkel ϕ gemäß $z = R_0\phi$ über.

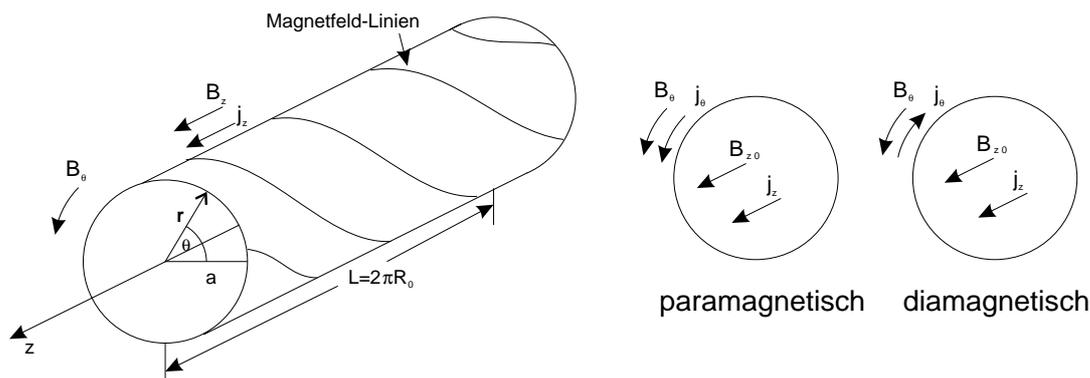


Abbildung 2.4: Schematische Anordnung des Screw-Pinches (links) und zur radialen Kraftbilanz beitragende Ströme.

Das extern erzeugte Feld B_z muß ausreichend groß sein, um die Stabilität zu gewährleisten. Es zeigt sich, daß dies einer Forderung an den sogenannten Sicherheitsfaktor q entspricht. Dieser beschreibt die Geometrie der Feldlinien:

$$q = \frac{\text{Anzahl der toroidalen Umläufe}}{\text{Anzahl der poloidalen Umläufe}} \quad (2.44)$$

einer Feldlinie auf dem Torus. So schließt sich z.B. eine Feldlinie mit $q = 1$ nach einem toroidalen Umlauf in sich selbst; eine Feldlinie mit $q = 2$ benötigt hierzu zwei Umläufe. Der Sicherheitsfaktor berechnet sich aus dem Quotienten der Winkeländerung in toroidaler Rich-

tung, $\Delta\phi$, und der in poloidaler Richtung $\Delta\theta$ längs der Feldlinie. In der Näherung konstanter Felder B_θ und B_ϕ ergibt sich dann aus der Gleichung der Feldlinie $B_\theta/B_\phi = r\Delta\theta/R\Delta\phi$

$$q = \frac{\Delta\Phi}{\Delta\theta} = \frac{r B_\phi}{R B_\theta} \quad (2.45)$$

Für den Screw-Pinch folgt Stabilität für $q > 1$ (Kruskal-Shafranov-Limit, siehe Kap. 3). In der Praxis variiert das q -Profil eines Tokamaks zwischen 1 (auf der Achse) und 3-5 (am Rand). Damit ergibt sich für einen Torus mit Aspektverhältnis $R/r \approx 3$ typischerweise ein notwendiges Feld von $B_z \approx 10B_\theta$.

Die Berechnung des MHD-Gleichgewichtes für den Screw-Pinch erfolgt analog zum z -Pinch. Im Ampèreschen Gesetz müssen nun die Felder B_θ und B_z berücksichtigt werden:

$$-\frac{1}{\mu_0} \frac{dB_z}{dr} = j_\theta \quad (2.46)$$

$$\frac{1}{\mu_0 r} \frac{d}{dr}(rB_\theta) = j_z \quad (2.47)$$

Das axiale Magnetfeld B_z setzt sich somit aus dem extern erzeugten Magnetfeld $B_{z0} = \text{const}$ und dem im Plasma durch j_θ erzeugten Magnetfeld zusammen. Einsetzen des Magnetfeldes in die Kraftgleichung liefert nun

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{d}{dr} \left(\frac{B_\theta^2 + B_z^2}{2\mu_0} \right) - \frac{B_\theta^2}{\mu_0 r} \quad (2.48)$$

Im Experiment sind der extern erzeugte Anteil B_{z0} und j_z vorgegeben. Der im Plasma fließende Strom j_θ kann über $j_\theta B_z$ zur Kraftbilanz beitragen. Dieser Strom und der damit verbundene Beitrag zum axialen Feld B_z ist jedoch nicht direkt experimentell vorgegeben. Daher ist p eine freie Größe. Wir haben also durch die Addition des axialen Feldes einen weiteren Freiheitsgrad gewonnen. Damit kann im Experiment bei festem I_p der Druck variiert werden (z.B. durch die dem Plasma zugeführte Heizleistung). Je nach Größe des Druckes variiert das Vorzeichen von j_θ :

- Ist der Druckgradient kleiner als der durch $j_z B_\theta$ vorgegebene Wert, so ist $j_\theta B_z$ antiparallel zu $j_z B_\theta$. Die Effizienz des Einschlusses ist dann kleiner als im z -Pinch, d.h. $\beta_\theta < 1$. Wie in Fig. 2.4 dargestellt, ist das von j_θ erzeugte Feld dann dem externen Feld $B_z(0)$ parallel, d.h. das Plasma reagiert *paramagnetisch*.
- Ist der Druckgradient größer als der durch $j_z B_\theta$ vorgegebene Wert, so ist $j_\theta B_z$ parallel zu $j_z B_\theta$. Die Effizienz des Einschlusses ist dann größer als im z -Pinch, d.h. $\beta_\theta > 1$. In diesem Fall reagiert das Plasma *diamagnetisch*.

Man beachte aber, daß nur der durch den poloidalen Plasmastrom erzeugte Anteil von B_z zum Einschluß beiträgt, während der konstante externe Anteil in der Druckbilanz (2.48) nicht vorkommt. Die Variation von β_θ ist nach oben hin durch das sog. Gleichgewichtslimit $\beta_\theta \approx R/r$

gegeben (dafür werden wir im nächsten Abschnitt eine anschauliche Erklärung geben). Somit ist im Tokamak das gesamte β gegenüber dem z -Pinch ungefähr um den Faktor $(r/R)(B_z/B_\theta)^2$ reduziert. Das Gleichgewichtslimit an β ist danach von q abhängig, mit der obigen Näherung für q gilt $\beta_{max} \approx r/(Rq^2)$. Für obiges Zahlenbeispiel ($R/r = 3$, $B_z/B_\theta = 10$) ergibt sich somit ein Wert von ca. 3 %. In der Praxis werden Werte in der Größenordnung einiger Prozent erreicht. Allerdings ist, in den meisten Fällen, das β -Limit im Tokamak meistens nicht durch das Gleichgewichtslimit, sondern durch MHD-Instabilitäten bestimmt. Auf dieses sog. Troyon-Limit werden wir in Kapitel 4 eingehen.

Der Screw-Pinch bietet somit experimentelle Flexibilität beim Plasmaeinschluß auf Kosten einer gegenüber dem z -Pinch verringerten Effizienz. Das größte experimentelle Problem bleiben die hohen Endverluste durch Wärmeleitung längs der Feldlinien. Daher geht man vom linearen Screw-Pinch zur toroidalen Anordnung mit verschraubten Feldlinien über.

2.4 Toroidale Anordnungen

Beim Übergang zu toroidalen Anordnungen erhöht sich der mathematische Aufwand bei der Beschreibung der Gleichgewichte. Man kann jedoch unter Annahme toroidaler Symmetrie eine Differentialgleichung angeben, welche ein toroidales Gleichgewicht beschreibt. Dies kommt im Tokamak zur Anwendung. Hier wird das Toroidalfeld durch externe Spulen erzeugt, während die poloidale Komponente des Magnetfeldes durch einen im Plasma fließenden Strom erzeugt wird. Dieser Strom wird mit Hilfe einer Transformatorspule im Plasma induziert. Auf Grund der hohen Leitfähigkeit des Plasmas treibt man mit relativ kleinen Umfangsspannungen (≈ 1 V) bereits hohe Plasmaströme (mehrere MA in heutigen Experimenten). Ein Schema eines Tokamaks zeigt Fig. 2.5.

Bei Aufgabe der toroidalen Symmetrie erhöht sich der Aufwand weiter, die Berechnung von Gleichgewichten für den Stellarator ist i.a. nur noch numerisch möglich.

2.4.1 Der Tokamak

Im Tokamak liegt Axisymmetrie vor, d.h. die Konfiguration ist unabhängig von der toroidalen Koordinate ϕ . Damit können wir die Anordnung in Zylinderkoordinaten beschreiben (siehe Fig. 2.6).

Prinzipiell müssen wir wieder die Kraftgleichung sowie das Ampèresche Gesetz lösen. Es zeigt sich jedoch, daß sich das Problem auch durch eine einzige skalare Gleichung beschreiben läßt. Diese wollen wir im folgenden ableiten.

Zunächst führen wir das Konzept der Flußintegrale ein: Für die beiden Vektorfelder \vec{B} und \vec{j} gilt $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ (generell) und $\nabla \cdot \vec{j} = 0$ (da im stationären Fall keine Ladungsanhäufung auftreten darf). Daraus folgt, daß die Flußintegrale

$$\int_C \vec{B} d\vec{A} \quad \text{magnetischer Fluss} \quad (2.49)$$

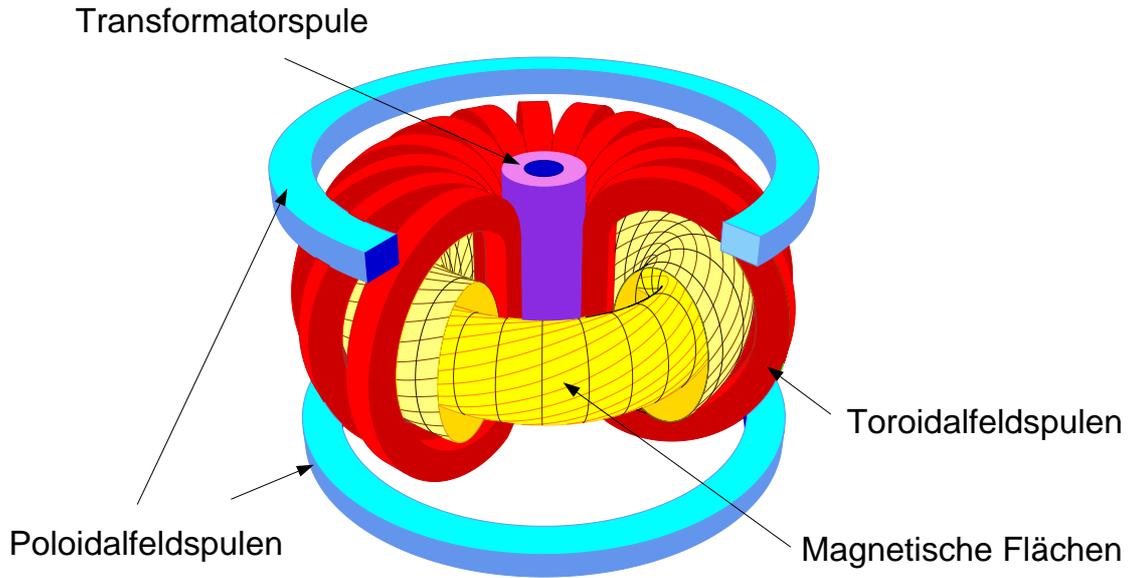


Abbildung 2.5: Schema eines Tokamaks.

$$\int_C \vec{j} d\vec{A} \quad \text{Gesamtstrom} \quad (2.50)$$

wegen

$$\int_C \vec{B} d\vec{A}_1 + \int_C \vec{B} d\vec{A}_2 = \oint \vec{B} d\vec{A} = \int \nabla \cdot \vec{B} dV = 0 \quad (2.51)$$

für beliebige, von der Kurve C berandete Flächen, A_1, A_2 den gleichen Wert haben (man beachte die unterschiedliche Orientierung der Flächennormalenvektoren). Die Flüsse sind also eindeutig einer Kurve zuzuordnen.

Weiterhin liegen wegen $\vec{B} \cdot \nabla p = \vec{B} \cdot \vec{j} \times \vec{B} = 0$ (eine analoge Gleichung gilt für \vec{j}) die Vektoren \vec{B} und \vec{j} in der Fläche $p = \text{const}$. Da auf diesen Flächen $\vec{B} \cdot d\vec{A} = \vec{j} \cdot d\vec{A} = 0$ gilt, spannen somit die Vektoren \vec{j} und \vec{B} Flächen auf, auf denen sowohl der Druck als auch die oben definierten Flüsse konstant sind. Im axisymmetrischen Fall kann man beweisen, daß diese sog. magnetischen Flächen oder Flußflächen ineinandergeschachtelte verallgemeinerte Tori sind. Dies ist in Fig. 2.6 angedeutet. Da es auf dem Torus zwei topologisch unterschiedliche Arten von Kurven gibt (poloidal bzw. toroidal umlaufende), kann man die magnetischen Flächen entweder durch die toroidalen oder die poloidalen Flüsse kennzeichnen. Wir beziehen uns im folgenden auf toroidal umlaufende Kurven (siehe Fig. 2.6) und beschreiben das Plasma somit durch den poloidalen magnetischen Fluß Ψ und den poloidalen Strom I_{pol} .

Da p nur von Ψ abhängt, können wir nun die Kraftgleichung umschreiben

$$\frac{\partial p}{\partial R} = \frac{dp}{d\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial R} = j_\phi B_z - j_z B_\phi \quad (2.52)$$

Die Komponenten von \vec{j} ersetzen wir nach dem Ampèreschen Gesetz

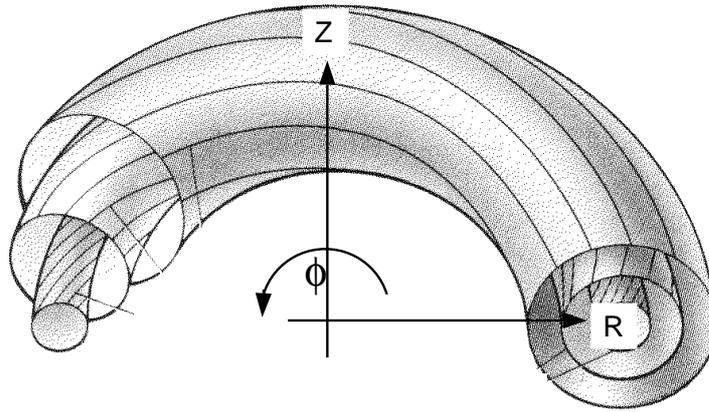


Abbildung 2.6: Zylinderkoordinaten R, Z, ϕ zur Berechnung axisymmetrischer MHD-Gleichgewichte.

$$j_\phi = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial B_R}{\partial Z} - \frac{\partial B_Z}{\partial R} \right) \quad (2.53)$$

$$j_z = \frac{1}{\mu_0 R} \frac{\partial}{\partial R} (R B_\phi) \quad (2.54)$$

Wir können nun die Komponenten von \vec{B} mit den Flüssen in Verbindung bringen. Für die in Fig. 2.6 eingezeichnete Fläche (R, ϕ -Ebene) berechnet sich der magnetische Fluß zu

$$\Psi(R) = 2\pi \int_0^R dR' R' B_Z(R') \quad (2.55)$$

Nach dem Hauptsatz der Integralrechnung ergibt sich damit

$$B_Z(R, Z) = \frac{1}{2\pi R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \quad (2.56)$$

Analog erhält man

$$B_R(R, Z) = -\frac{1}{2\pi R} \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \quad (2.57)$$

Schließlich ist das toroidale Magnetfeld B_ϕ analog zum axisymmetrischen stromdurchflossenen Leiter nach Gl. (2.54) durch

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I_{pol}}{2\pi R} \quad (2.58)$$

gegeben. Demnach fällt das Vakuumtoroidalfeld wie $1/R$ ab.

Somit können wir in Gl. (2.52) alle Vektorkomponenten durch die Flüsse ausdrücken und gelangen schließlich zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung für Ψ

$$R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} = \Delta^* \Psi = -\mu_0 2\pi R j_\phi = -\mu_0 (2\pi R)^2 p' - \mu_0^2 I'_{pol} I_{pol} \quad (2.59)$$

wobei der Strich die Ableitung nach Ψ bezeichnet. Diese Gleichung ist auch als Grad-Shafranov-Gleichung bekannt. Sie beschreibt das toroidale axisymmetrische Gleichgewicht vollständig. Man erkennt wieder den Beitrag des toroidalen Stromes zur Druckbilanz sowie den Diamagnetismus des Plasmas, bei dem wiederum das Vakuum-Toroidalfeld wegen $I'_{pol,0} = 0$ im Plasma nicht zur Kraftbilanz beiträgt.

Man beachte aber, daß die Grad-Shafranov-Gleichung nichtlinear in Ψ ist, da p und I_{pol} von Ψ abhängen. Daher muß sie im allgemeinen numerisch gelöst werden. Dabei kann man vorgegebene Randbedingungen (z.B. $\Psi = 0$ am Vakuumgefäß) durch Addition eines magnetischen Flusses Ψ_0 mit $\Delta^* \Psi_0 = 0$, d.h. Vakuumfelder, erfüllen. Solch ein Fluß wird durch externe Ströme in toroidal umlaufenden Spulen (sog. Poloidalfeldspulen, siehe Fig. 2.5) erzeugt. Die Grad-Shafranov-Gleichung bestimmt somit die Lage und die notwendigen Ströme der Poloidalfeldspulen, um eine gewünschte Plasmakonfiguration im Gleichgewicht zu halten.

Für steigendes β_p verschiebt sich die magnetische Achse in Bezug auf die letzte geschlossene Flußfläche in radiale Richtung. Diese sog. Shafranov-Shift ist auf die den Torus radial expandierende Hoop-Force zurückzuführen. Diese hat zwei Beiträge

- Die Expansionskraft eines Stromringes auf Grund der Torusgeometrie: analog zu einer stromdurchflossenen Leiterschleife wirkt wegen der abstoßenden Wirkung entgegengesetzt fließender Ströme eine expandierende Kraft.
- Der kinetische Plasmadruck führt ebenfalls zu einer Expansionskraft; dies ist analog zur Expansion z.B. eines Fahrradschlauches unter Druck.

Zur Kompensation der Hoop-Force müssen die Poloidalfeldspulen in erster Ordnung ein Vertikalfeld B_z erzeugen, das, gekreuzt mit dem Plasmastrom, eine Nettokraft radial nach innen ausübt. Dieses Feld stärkt das Magnetfeld auf der Außenseite, daher liegen nach Gl. (2.56) die Flußflächen näher zusammen, während auf der Innenseite der entgegengesetzte Effekt auftritt. Hiermit können wir auch qualitativ das oben erwähnte Gleichgewichts-Limit an β_p verstehen: Für zu hohes β_p ist das Vertikalfeld so stark, daß es auf der Innenseite das Feld zu Null macht. Dann entsteht eine sogenannte Separatrix, welche das Plasma magnetisch begrenzt. Bei weiterer Erhöhung von β_p nimmt nun der kleine Plasmaradius ab. Eine genauere Analyse ergibt, daß im Tokamak β_p auf Werte von der Größenordnung des Aspektverhältnisses begrenzt ist. Wie bereits beim Screw-Pinch erwähnt, führt das zu einer Begrenzung des gesamten β auf $\beta_{max} \approx \beta_{t,max} \approx r/(Rq^2)$. Für einen typischen Tokamak mit $r/R \approx 1/3$ und $q \approx 3$ bedeutet dies z.B. $\beta_{max} \approx 3\%$. In der Praxis wird im Tokamak jedoch das erreichbare β oftmals durch MHD-Instabilitäten limitiert (Troyon-Limit, siehe Kap. 4).

In modernen Tokamaks wird das System der Poloidalfeldspulen auch zur Formgebung (Elongation etc.) benutzt; so wird z.B. in der sogenannten Divertor-Konfiguration eine magnetische

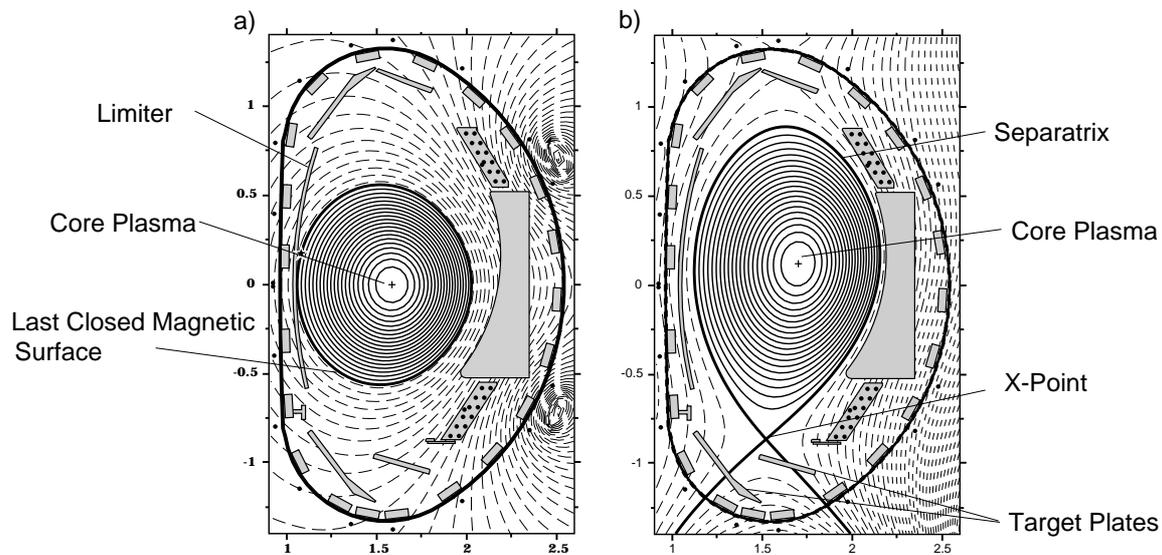


Abbildung 2.7: Vergleich des materiellen Limiters mit dem magnetischen Limiter (Divertor).

Begrenzung durch eine Separatrix verwendet. Damit kann die Zone der intensiven Plasma-Wand-Wechselwirkung am Plasmarand vom heißen Plasma entfernt gehalten werden. Der Vergleich einer Limiterkonfiguration mit einer Divertorkonfiguration ist in Fig. 2.7 gezeigt.

2.4.2 Der Stellarator

Beim Stellarator (lat. stella = der Stern) wird das Poloidalfeld gänzlich von externen Spulen erzeugt. Hierbei stellt sich zunächst das Problem, daß auf Grund des fehlenden Toroidalstromes im Plasma wegen des Ampèreschen Gesetzes das Umlaufintegral über B_θ verschwindet. Eine dem Tokamak analoge Lösung mit näherungsweise konstantem B_θ gibt es daher nicht. Ein von Null verschiedenes Poloidalfeld kann jedoch durch höhere Multipolmomente des Stromes erzeugt werden. Dann variiert B_θ in einer poloidalen Ebene z.B. sinusförmig, sodaß $\oint B_\theta d\theta = 0$ gewährleistet ist. Die Verteilung der externen toroidalen Ströme, welche dieses Feld erzeugen, müssen dann ebenfalls ein höheres Multipolmoment beinhalten.

Verschraubt man nun die externen Ströme helikal, so ergeben sich im Plasma umlaufende Feldlinien. Dieses ist in Fig. 2.8 schematisch dargestellt. In jeder poloidalen Ebene ist das Umlaufintegral wegen der sinusförmigen Variation des Poloidalfeldes Null; trotzdem läuft die Feldlinie als Ganzes helikal um den Torus um. Allerdings ist die Konfiguration, im Gegensatz zum Tokamak, jetzt nicht mehr axisymmetrisch, vielmehr variieren die Magnetfelder nun auch in toroidaler Richtung.

Damit kann man durch externe verschraubte Leiter eine Konfiguration erzeugen, welche auf

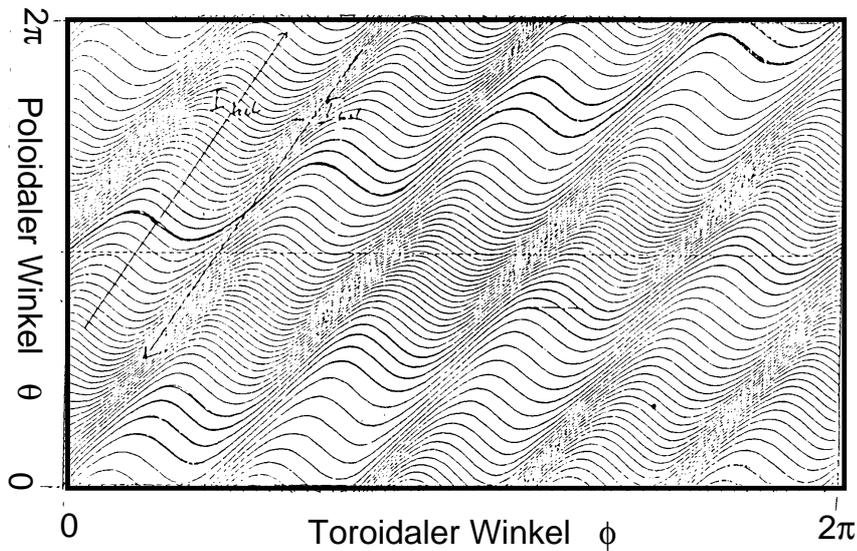


Abbildung 2.8: Verlauf von Feldlinien im Stellarator.

einem Torus umlaufende Feldlinien erzeugt. Die Summe der helikalen Ströme ist wiederum Null, sodaß sich ein Multipolfeld ergibt. In dieser auch *Helias* genannten Anordnung läßt sich die Stromverteilung in den externen Leitern näherungsweise durch

$$I(\theta) = I_0 \sin(\ell\theta - M\phi) \quad (2.60)$$

beschreiben. Man erkennt, daß hier eine helikale Symmetrie vorliegt, d.h. $(\ell\theta - M\phi)$ ist eine ignorable Koordinate. Zusätzlich zu den helikalen Strömen benutzt man im Experiment oftmals auch Spulen, welche ein reines Toroidalfeld erzeugen. Die Addition der beiden Felder erlaubt eine experimentelle Variation der Feldliniensteigung und damit des Sicherheitsfaktors. Beispiele für Heliaskonfigurationen sind in Fig. 2.9 gezeigt. Sie werden nach der Zahl ℓ , d.h. der Periode in poloidaler Richtung benannt.

In Fig. 2.9 sind noch zwei weitere Varianten des oben beschriebenen Prinzips zu sehen. Im Stellarator mit modularem Spulenaufbau wird die Summe von planaren Toroidalfeldspulen und helikal umlaufenden Stellaratorwindungen durch einen Satz von komplex geformten, dreidimensionalen Spulen ersetzt. Dies ist im Hinblick auf die Reaktortauglichkeit, bei der modulare Bauweise gefordert werden muß (z.B. zur Möglichkeit, Spulen auszuwechseln), erforderlich. Im Torsatron ist die Summe der Windungsströme von Null verschieden, daher kann im Plasma ein Strom induziert werden. Die Konfigurationen unterscheiden sich durch ihre Verscherung: während der $\ell = 2$ Stellarator praktisch keine magnetische Verscherung aufweist, ist diese beim $\ell = 3$ -Stellarator und beim Torsatron von ähnlicher Größenordnung wie im Tokamak. Allerdings variiert sie im umgekehrten Sinne, d.h. q fällt von innen nach außen ab.

Schließlich kann man auch noch die helikale Symmetrie aufgeben, d.h. die Ganghöhe der Stellaratorwindungen variieren. So gelangt man zu Stellaratorkonfigurationen, wie sie z.B. für das

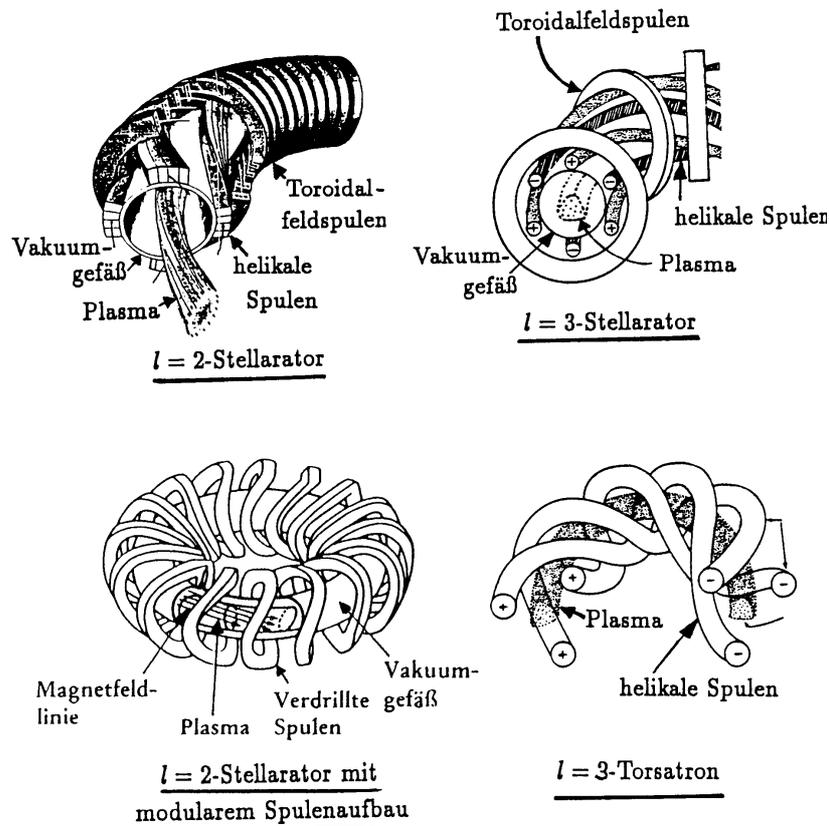


Abbildung 2.9: Verschiedene Realisierungen des Stellaratorprinzips.

in Planung befindliche Stellaratorexperiment Wendelstein VII-X vorgesehen sind. Hier ist die Konfiguration auf Grund theoretischer Voraussagen im Hinblick auf Transport und Stabilitätseigenschaften optimiert worden.

Trotz der Vorteile der prinzipiellen Möglichkeit des stationären Betriebs und des Fehlens des Plasmastromes und damit der Stromabbruchinstabilität ist die Stellarator-Konfiguration heutzutage experimentell weniger fortgeschritten als der Tokamak. Dies liegt vor allem an den experimentellen Problemen des Plasmaaufbaus (hier muß in jedem Fall mit Zusatzheizung gearbeitet werden), als auch an der Komplexität des Spulenaufbaus. Zusätzlich hat der Stellarator ein großes Aspektverhältnis von $R/a \approx 10 - 15$, sodaß für vergleichbare Lineardimensionen das Plasmavolumen erheblich kleiner ist. Man muß daher zu größeren Werten des großen Radius R gehen, um mit dem Tokamak zu konkurrieren. Damit stellt auch das oben angesprochene Gleichgewichtslimit für β wegen der Abhängigkeit vom Aspektverhältnis für den Stellarator eine größere Einschränkung dar. Für das obige Zahlenbeispiel $q = 3$ ergibt sich z.B. mit einem Aspektverhältnis von $R/r = 10$ ein Gleichgewichts β -Limit von 1% (dies kann z.B. durch Operation bei niedrigerem q erhöht werden). Bei konsequenter Weiterentwicklung könnte jedoch der Stellarator ein aussichtsreicher Kandidat für den Fusionsreaktor werden.

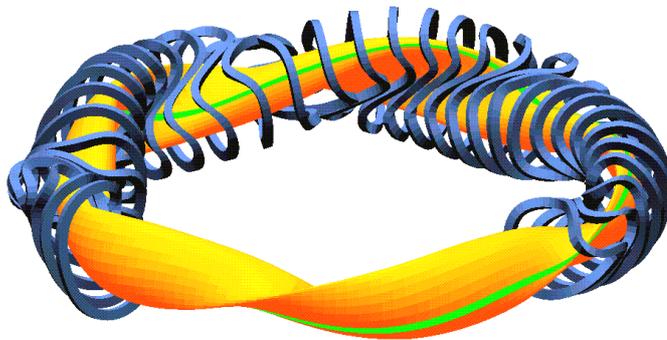


Abbildung 2.10: *Schema eines modularen Stellarators ohne helikale Symmetrie (nach dem Entwurf für Wendelstein WVII-X).*

Kapitel 3

MHD-Stabilitätsanalyse

Im vorherigen Kapitel haben wir MHD-Gleichgewichte berechnet. Wir fanden so Konfigurationen, bei denen sich das Plasma im Kräftegleichgewicht befindet. Es wurde jedoch keine Aussage bezüglich der Stabilität der Konfiguration gemacht. Diese ist durch die Antwort des Systems auf eine infinitesimale Störung bestimmt. Die Situation ist analog einer Kugel in einem Potentialtopf (siehe Fig.3.1). An Stellen mit $dV/dx = -F = 0$ ist das System im Kräftegleichgewicht, bei einer kleinen Verschiebung kann die entstehende Kraft jedoch sowohl rücktreibend sein (Stabilität, Fig. 3.1 a)) oder die anfängliche Auslenkung verstärken (Instabilität, Fig. 3.1 b)). Fig. 3.1 demonstriert auch das Konzept der nichtlinearen Stabilität bzw. Instabilität: Hier hängt das Verhalten von der Größe der Anfangsstörung ab.

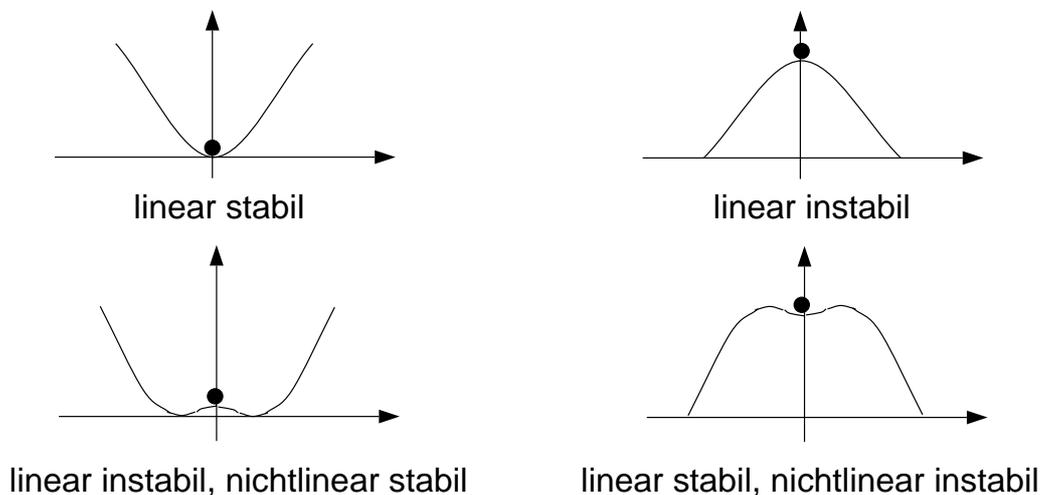


Abbildung 3.1: Zum Konzept der linearen und nichtlinearen Stabilität.

Bevor wir uns aber mit der Stabilität in der MHD beschäftigen, wollen wir die grundsätzlichen Methoden an einigen einfachen Beispielen diskutieren.

3.1 Die Rayleigh-Taylor Instabilität

Bereits in der Hydrodynamik begegnen uns die Methoden der Stabilitätsanalyse, welche wir später in der MHD verwenden. Als einfaches Beispiel untersuchen wir die Rayleigh-Taylor Instabilität, d.h. die Stabilität einer Flüssigkeit inhomogener Dichte unter dem Einfluß der Gravitationskraft. Es ist bereits intuitiv einsichtig, daß Instabilität vorliegt, wenn Flüssigkeitsschichten größerer Dichte oberhalb solcher mit geringerer Dichte liegen (siehe Fig. 3.2).

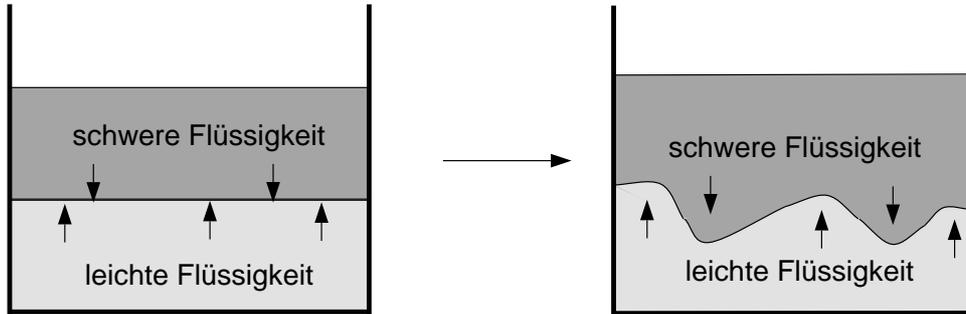


Abbildung 3.2: Rayleigh-Taylor Instabilität einer Flüssigkeit inhomogener Dichte im Gravitationsfeld.

In diesem Fall lautet die Kraftgleichung

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p - \rho \vec{g} \quad (3.1)$$

wobei \vec{g} die Gravitationsbeschleunigung darstellt. Sie zeige in negative z -Richtung. Dann gilt im Gleichgewicht

$$\nabla p = -\rho \vec{g} \rightarrow \frac{dp}{dz} = -\rho g \rightarrow p = \rho g(h - z) \quad (3.2)$$

d.h. das hydrostatische Druckgesetz für eine bestimmte Stauhöhe h . Im Gleichgewicht hängen ρ und p somit nur von z ab.

Die Dynamik des Systems ist durch die zeitabhängige Kraftgleichung gegeben. Entwicklung mit $\vec{v}_0 = 0$ und $\rho = \rho_0(z) + \rho_1(\vec{x}, t)$ sowie $p = p_0(z) + p_1(\vec{x}, t)$ liefert in erster Ordnung

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 - \rho_1 \vec{g} \quad (3.3)$$

Weiterhin gilt die linearisierte Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -(\rho_0 \nabla \cdot \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \cdot \nabla \rho_0) \quad (3.4)$$

Wir haben damit 4 Gleichungen für die 5 Komponenten p_1, ρ_1, \vec{v}_1 , d.h. wir müssen eine Zusatzannahme machen. Mit der Bedingung $\nabla \cdot \vec{v}_1 = 0$ (inkompressible Flüssigkeit) wird das System lösbar. Da die Gleichgewichtsgrößen nur von z abhängen, können wir die Zeit sowie die x und y Komponente durch einen Fourieransatz separieren:

$$f(x, y, z, t)_1 = f_1(z) e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} \quad (3.5)$$

wobei \vec{k} der zweidimensionale Wellenzahlvektor in der (x, y) -Ebene ist und ω die komplexe Frequenz darstellt. Reelle ω bedeuten eine Schwingung des Systems um die Gleichgewichtslage, während imaginäre ω exponentiell anwachsenden Lösungen entspricht. Nun können p_1 und ρ_1 aus den obigen Gleichungen eliminiert werden und wir erhalten eine gewöhnliche Differentialgleichung für die z -Komponente von \vec{v}_1 :

$$\omega^2 \frac{d}{dz} \left(\rho_0 \frac{dv_{1z}}{dz} \right) = k^2 \left(\omega^2 \rho_0 + g \frac{d\rho_0}{dz} \right) v_{1z} \quad (3.6)$$

Diese Gleichung ist von der Form $\hat{O}v_{1z} = c v_{1z}$, d.h. ein Eigenwertproblem für v_{1z} . Die Lösung für vorgegebenes $\rho_0(z)$ ergibt $\omega(k)$, d.h. das sogenannte *Spektrum* des Operators \hat{O} . Im allgemeinen wird sich diese Gleichung für beliebiges $\rho_0(z)$ nicht analytisch lösen lassen. Wir können die Lösung jedoch für eine spezielle Wahl von $\rho_0(z)$ angeben. Setzen wir

$$\rho_0 = \rho_c e^{\frac{z}{\lambda}} \quad (3.7)$$

so ist $\lambda = \rho_0 (d\rho_0/dz)^{-1}$ die Skalenlänge auf der die Dichte der Flüssigkeit variiert. Mit diesem Ansatz ergibt sich für die Eigenwertgleichung

$$\frac{d^2 v_{1z}}{dz^2} + \frac{1}{\lambda} \frac{dv_{1z}}{dz} - \left(\frac{gk^2}{\lambda \omega^2} + k^2 \right) v_{1z} = 0 \quad (3.8)$$

Diese Gleichung ist von der mathematischen Struktur des gedämpften harmonischen Oszillatorproblems; die Lösung lautet daher

$$v_{1z} = \text{const.} \cdot e^{-\frac{z}{2\lambda}} \sin \left(\left(-\frac{gk^2}{\lambda \omega^2} - \frac{1}{(2\lambda)^2} - k^2 \right)^{1/2} z \right) \quad (3.9)$$

Wie bei anderen Eigenwertproblemen (z.B. in der Quantenmechanik) ergeben sich die Eigenwerte $\omega(k)$ durch Einsetzen der Randbedingungen. Hier fordern wir, daß die Störung am oberen und unteren Rand verschwindet, also $v_{1z}(0) = v_{1z}(h) = 0$, d.h. das Argument des Sinus muß gerade $n\pi/h$ sein, wobei n eine beliebige ganze Zahl ist. Es ergibt sich

$$\omega^2 = -\frac{g}{\lambda} \frac{k^2}{\left(\frac{n\pi}{h} \right)^2 + k^2 + \frac{1}{(2\lambda)^2}} \quad (3.10)$$

Das Vorzeichen von ω^2 entscheidet über die Stabilität des Systems: Für $\omega^2 > 0$ ist ω reell und das System führt Schwingungen um die Ruhelage aus; dies entspricht der stabilen Situation. Für $\omega^2 < 0$ existiert eine exponentiell anwachsende Lösung. Dieser Fall entspricht der

Instabilität. Da auf der rechten Seite von Gl. (3.10) bis auf λ nur positive Größen auftauchen, entscheidet das Vorzeichen von λ über das Verhalten. Im Einklang mit der intuitiven Erwartung erhält man Stabilität für $\lambda < 0$, d.h. einer nach oben hin abnehmenden Dichte, während der Fall einer schwereren Flüssigkeit über einer leichteren zur Rayleigh-Taylor Instabilität führt. Diese Instabilität kann experimentell leicht mit gefärbten Flüssigkeiten unterschiedlicher Dichte sichtbar gemacht werden. Für $k \rightarrow \infty$, d.h. kleine Wellenlängen, erhält man die maximale Anwachsrate $\omega \rightarrow g/\lambda$. Diese entspricht gerade dem freien Fall des Flüssigkeitselementes längs der Skalenlänge.

Wie bereits oben erwähnt, ist die Lösung des Eigenwertproblem im allgemeinen nicht analytisch durchführbar. Um trotzdem einen Überblick über die Stabilitätseigenschaften des Systems zu erhalten, kann man die Eigenwertgleichung zu einem Variationsausdruck umformen. Dies geschieht durch Multiplikation mit v_{1z} und Integration über die gesamte Höhe

$$\omega^2 \int_0^h v_{1z} \frac{d}{dz} \left(\rho_0 \frac{dv_{1z}}{dz} \right) dz = k^2 \int_0^h v_{1z}^2 \left(\omega^2 \rho_0 + g \frac{d\rho_0}{dz} \right) dz \quad (3.11)$$

Nach partieller Integration des ersten Termes erhält man unter Benutzung der obigen Randbedingungen

$$\omega^2 = -k^2 \frac{\int_0^h v_{1z}^2 g \frac{d\rho_0}{dz} dz}{\int_0^h \rho_0 \left(\left(\frac{dv_{1z}}{dz} \right)^2 + k^2 v_{1z}^2 \right) dz} \quad (3.12)$$

Wir haben somit einen Variationsausdruck erhalten, der für eine beliebige Testfunktion v_{1z} gilt. Der Ausdruck (3.12) stellt ein Funktional in Abhängigkeit von v_{1z} dar. Gelingt es, eine Testfunktion v_{1z} zu finden, für die ω^2 negativ wird, so ist das System instabil. Man beachte aber, daß die so gewählte Testfunktion v_{1z} i.a. keine Eigenfunktion darstellt. Das so erhaltene ω ist daher nicht unbedingt ein Maß für die tatsächliche Anwachsrate, welche immer durch das zur Eigenfunktion gehörende ω bestimmt ist (die ausgezeichnete Stellung der Eigenfunktionen besteht gerade in ihrer Eigenschaft, den Variationsausdruck zu maximieren). Daher erhält man nur eine untere Grenze für die Anwachsrate (man stelle sich die gewählte Testfunktion nach Eigenfunktionen entwickelt vor; dann ist ω^2 eine gewichtete Summe der Eigenwerte).

Aus Gl. (3.12) können wir wieder das obige Stabilitätskriterium erhalten: bis auf den Dichtegradient sind alle Terme positiv definit, daher wählen wir eine Testfunktion, welche z.B den Wert 1 hat, wenn $d\rho_0/dz$ positiv ist, und ansonsten verschwindet. Dann ist $\omega^2 < 0$ und das System ist instabil. Ist $d\rho_0/dz$ überall negativ, gelingt es nicht, eine Testfunktion zu wählen, welche ω^2 negativ macht; das System ist daher stabil.

Wir haben somit zwei Methoden kennengelernt, mit denen man über die Stabilität eines hydrodynamischen Systems entscheiden kann:

- Bei der Eigenwertmethode muß man eine Eigenwertgleichung lösen und erhält aus dem

Spektrum $\omega(k)$ die Anwachsrate. Diese Methode liefert somit eine detaillierte Lösung, führt aber schnell zu Eigenwertproblemen, welche analytisch nicht mehr lösbar sind.

- Bei der Variationsmethode erhält man einen Funktionalausdruck für die Anwachsrate in Abhängigkeit von der Störung und kann durch Wahl einer beliebigen Testfunktion Aussagen über die Stabilität des Systems treffen. Findet man eine Testfunktion, für die Instabilität vorliegt, so ist die Instabilität des Systems bewiesen, ohne daß eine Eigenfunktion bestimmt wurde (der Nachweis von Stabilität ist oftmals schwieriger, da hier das System für alle möglichen Testfunktionen stabil sein muß). Für die Anwachsrate kann bei dieser Methode im allgemeinen nur eine untere Grenze angegeben werden.

3.2 Die Parker-Instabilität

Eine der Rayleigh-Taylor Instabilität verwandte Situation ergibt sich, wenn man den Effekt des Magnetfelds auf das hydrostatische Gleichgewicht, z.B. an der Sonnenoberfläche, untersucht. Dazu betrachten wir zunächst eine nicht gekrümmte isolierte magnetische Flussröhre in einer unmagnetisierten isothermen Plasmaumgebung. Lokal müssen sich lateraler interner und externer Druck die Waage halten, d.h. mithilfe des idealen Gasgesetzes gilt

$$\frac{k_B T_{ex} \rho_{ex}}{m} = \frac{k_B T_{in} \rho_{in}}{m} + \frac{B_{in}^2}{2\mu}. \quad (3.13)$$

Im thermodynamischen Gleichgewicht gilt $T_{ex} = T_{in}$ und das Plasma in der Flussröhre spürt im Gravitationsfeld eine Kraftdichte, die zum Auftreiben der Flussröhre führt

$$(\rho_{ex} - \rho_{in})g = \frac{B_{in}^2}{2\mu_0\Lambda} \quad (3.14)$$

mit der bereits aus Kapitel 1 bekannten Skalenhöhe der barometrischen Höhenformel $\Lambda = k_B T / mg$. Im allgemeinen sind hier also Kräftegleichgewicht und thermodynamisches Gleichgewicht nicht miteinander vereinbar. Dieser sogenannte magnetische Auftrieb ist bei der Entstehung von Sonnenflecken sowie beim Transport magnetischen Flusses von galaktischen Scheiben und Akkretionsscheiben in deren Halos und Koronae wichtig. Wird die Flussröhre beim Auftrieb gekrümmt, so haben die auftretenden magnetischen Spannungen einen stabilisierenden Einfluss; im stationären Zustand werden wir es also mit gekrümmten Flussröhren zu tun haben. Eine schematische Darstellung der Verhältnisse gibt Fig. 3.3 a) wieder.

Wir betrachten im folgenden die Stabilität einer isolierten stationären magnetischen Flussröhre $\vec{B}_0 = B_0(z)\vec{e}_x$ mit $p_0(z) = k_B \rho_0(z) T_0(z) / m$ und der magnetostatischen Bilanz

$$\frac{d}{dz} \left(p_0(z) + \frac{B_0(z)^2}{2\mu} \right) + \rho_0 g = 0. \quad (3.15)$$

Die Geometrie ist in Fig. 3.3 b) dargestellt. Die relevanten um den Gleichgewichtszustand zu linearisierenden Bilanzgleichungen sind

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (3.16)$$

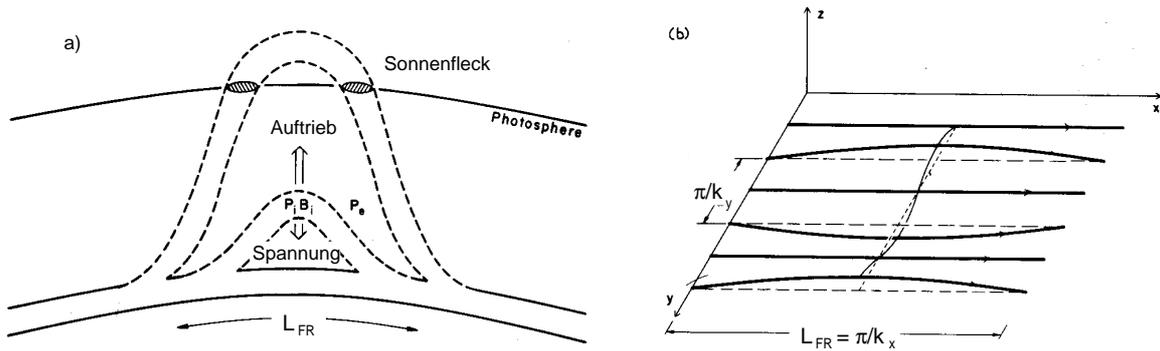


Abbildung 3.3: Zur Parker-Instabilität: a) Prinzip des Aufstiegs von magnetischen Flussröhren zur Sonnenoberfläche und Bildung von Sonnenflecken; b) vereinfachte Geometrie zur Berechnung des Stabilitätsproblems.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho \mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} - g \vec{e}_z \quad (3.17)$$

und

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}). \quad (3.18)$$

Analog zur Vorgehensweise bei der Rayleigh Taylor-Instabilität setzen wir für die Störgrößen wiederum $f(x, y, z, t)_1 = f_1(z) \exp(i(k_x x + k_y y - \omega t))$ an und erhalten die linearisierte Kontinuitätsgleichung

$$-i\omega \rho_1 = -i\rho_0(k_x v_{1x} + k_y v_{1y}) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho_0 v_{1z}) \quad (3.19)$$

Die x , y und z -Komponente der Kraftgleichung ergeben sich zu

$$-i\omega \rho_0 v_{1x} = -ik_x p_1 + \frac{B_{1z}}{\mu_0} \frac{\partial B_0}{\partial z} \quad (3.20)$$

$$-i\omega \rho_0 v_{1y} = ik_x B_{1y} \frac{B_0}{\mu_0} - ik_y \left(p_1 + B_{1x} \frac{B_0}{\mu_0} \right) \quad (3.21)$$

$$-i\omega \rho_0 v_{1z} = ik_x B_{1z} \frac{B_0}{\mu_0} - \frac{\partial}{\partial z} \left(p_1 + B_{1x} \frac{B_0}{\mu_0} \right) - \rho_1 g \quad (3.22)$$

Die Komponenten des linearisierten Ohmschen Gesetzes lauten

$$-i\omega B_{1x} = -iB_0 k_y v_{1y} - \frac{\partial}{\partial z} (B_0 v_{1z}) \quad (3.23)$$

$$\omega B_{1y} = -B_0 k_x v_{1y} \quad (3.24)$$

$$\omega B_{1z} = -B_0 k_x v_{1z}. \quad (3.25)$$

Wir haben es nun mit einem System von 7 Gleichungen für die 8 Störgrößen B_{1x} , B_{1y} , B_{1z} , v_{1x} , v_{1y} , v_{1z} , p_1 und ρ_1 zu tun. Durch Hinzunahme einer Zustandsgleichung kann

man ein System von 8 Gleichungen für 8 Unbekannte erhalten. Wir können aber die Zahl der Gleichungen reduzieren, wenn wir uns auf Störungen beschränken, die sehr stark in y -Richtung lokalisiert sind, d.h. formal $k_y \rightarrow \infty$, deren Wellenlängen also parallel zum Gleichgewichtsmagnetfeld viel größer als normal dazu sind. Dies entspricht gerade der Vorstellung lokalisierter Flussröhren, welche aufsteigen oder absinken.

In dieser Näherung muss wegen $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ die Störgrösse B_{1y} verschwinden, da $k_x = \pi/L_{FR}$ (wobei L_{FR} die Länge der Flussröhre bezeichnet) im instabilen Fall sicher endlich bleibt (für sehr kleines L_{FR} tritt ein sehr grosser stabilisierender Beitrag der Feldlinienspannung auf). Auf Grund von (3.24) verschwindet in dieser Näherung auch v_{1y} , so dass aufgrund von Glg. (3.21) gelten muss

$$p_1 + B_{1x} \frac{B_0}{\mu} = 0. \quad (3.26)$$

Somit reduziert sich Glg.(3.22) auf

$$-i\omega v_{1z} = ik_x B_{1z} \frac{B_0}{\mu \rho_0} - \frac{\rho_1}{\rho_0} g. \quad (3.27)$$

Der endliche Ausdruck $k_y v_{1y}$ kann aus den Glg.(3.19) und (3.23) eliminiert werden, woraus sich ergibt

$$i\omega B_{1x} + ik_x B_0 v_{1x} - i\omega B_0 \frac{\rho_1}{\rho_0} + v_{1z} B_0 \frac{\partial}{\partial z} (\ln \rho_0 - \ln B_0) = 0. \quad (3.28)$$

Die sechs homogenen Glg.(3.20), (3.25) und (3.26)-(3.28) sowie die isotherme Zustandsgleichung

$$p_1 = \rho_1 k_B T_0 / m \quad (3.29)$$

sind nun die algebraischen Bestimmungsgleichungen für die unbekanntenen Störampplituden v_{1x} , v_{1z} , B_{1x} , B_{1z} , p_1 und ρ_1 . Nichttriviale Lösungen existieren bekanntlich nur, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet. Dies ergibt die Dispersionsrelation

$$\begin{aligned} (c_s^2 + v_A^2)\omega^4 - v_A^2 \left((2c_s^2 + v_A^2)k_x^2 + g \frac{\partial}{\partial z} \ln \left(\frac{B_0}{\rho_0} \right) \right) \omega^2 \\ + v_A^4 k_x^2 \left(c_s^2 k_x^2 + g \frac{\partial}{\partial z} \ln B_0 \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

mit der lokalen isothermen Schallgeschwindigkeit $c_s^2 = k_B T_0 / m$ und der Gleichgewichts-Alfvén-Geschwindigkeit $v_A^2 = B_0^2 / (\mu_0 \rho_0)$.

Wir haben es also mit einer quadratischen Gleichung für ω^2 zu tun. Rein instabile Moden $\omega^2 < 0$ treten immer auf, wenn der Koeffizient vor dem quadratischen Term in ω positiv ist. Somit lautet das Einsatzkriterium für Instabilität

$$k_x^2 < -\frac{g}{2c_s^2 + v_A^2} \frac{\partial}{\partial z} \ln \left(\frac{B_0}{\rho_0} \right) \quad (3.31)$$

Zur Deutung dieses Ergebnisses definieren wir die Skalenlänge des B -Feldes und der Dichte

$$L_B = -\frac{1}{B_0} \frac{dB_0}{dz} = \frac{d}{dz} \ln B_0 \quad \text{und} \quad L_B = -\frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} = \frac{d}{dz} \ln \rho_0 \quad (3.32)$$

wobei wir wegen der nach oben (positive z -Richtung) abnehmenden Werte von B_0 und ρ_0 das Minuszeichen als Konvention gewählt haben, sowie die modifizierte Skalenlänge der barometrischen Höhenformel

$$\Lambda^* = \frac{p_{\text{gesamt}}}{g\rho} = \frac{1}{g} \left(\frac{k_B T_0}{m} + \frac{B_0^2}{2\mu_0 \rho_0} \right) = \frac{1}{g} \left(c_s^2 + \frac{1}{2} v_A^2 \right) \quad (3.33)$$

ein. Das Einsatzkriterium lautet dann

$$k_x^2 < \frac{1}{2\Lambda^*} \left(\frac{1}{L_B} - \frac{1}{L_\rho} \right) \quad (3.34)$$

Instabilität kann also vorliegen, wenn der Abfall des magnetischen Feldes mit der Höhe schneller als der Abfall der Dichte geschieht. Dann ergibt sich eine obere Grenze für die instabile Wellenzahl k_x welche sich in eine untere Grenze für die Länge der Flussröhre $L_{FR} = \pi/k_x$ übersetzt. Für eine Röhre, deren Länge grösser als diese kritische Länge ist, ist die Feldlinienspannung so klein, dass sie den Auftrieb nicht kompensieren kann.

Falls die Ungleichung (3.31) nicht erfüllt ist, kann ω^2 immer noch negativ werden, wenn der konstante Term in Glg. (3.30) negativ ist. Dann lautet das Einsatzkriterium für Instabilität

$$k_x^2 < -\frac{g}{c_s^2} \frac{\partial}{\partial z} \ln B_0. \quad (3.35)$$

oder

$$k_x^2 < \frac{1}{\Lambda L_B} \rightarrow L_{FR} > \pi \sqrt{L_B \Lambda}. \quad (3.36)$$

Instabilität kann also allgemein bei nach oben abnehmendem B-Feld auftreten, wenn die Wellenlänge der Störung in Magnetfeldrichtung grösser als das geometrische Mittel der Skalenlängen des Magnetfelds und der Skalenlänge der barometrischen Höhenformel ist. Wiederum kann in diesem Fall die Feldlinienspannung den Auftrieb nicht kompensieren. Das hier gegebene Bild kann qualitativ das Aufsteigen von Flussröhren aus der konvektiven Zone der Sonne an die Oberfläche und die damit verbundene Bildung der Sonnenflecken erklären. Zu einer quantitativen Beschreibung, vor allem der beteiligten Zeitskalen, muss aber eine Reihe weiterer physikalischer Effekte wie z.B. die verscherte Rotation der Sonne mit berücksichtigt werden.

3.3 Das Energieprinzip der idealen MHD

Analog zum Vorgehen bei der Behandlung der Rayleigh-Taylor und der Parker-Instabilität beginnen wir die Analyse mit der Linearisierung der MHD-Gleichungen. Dabei führen wir

den sog. Verschiebungsvektor $\vec{\xi}$ ein. Dieser ist eine Größe erster Ordnung und kennzeichnet die Verschiebung eines Flüssigkeitselementes aus der Ruhelage:

$$\vec{v}_1 = \frac{d\vec{\xi}}{dt} \quad (3.37)$$

Wir fragen also wieder nach der Antwort des Systems auf eine infinitesimale Auslenkung. Dazu ist es sinnvoll, die linearisierten Gleichungen in der Zeit aufzuintegrieren. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir dabei die Anfangsbedingungen $\vec{\xi}(\vec{x}, t = 0) = \vec{B}_1(\vec{x}, t = 0) = \rho_1(\vec{x}, t = 0) = p_1(\vec{x}, t = 0) = 0$ vorgeben, aber $\vec{v}_1 \neq 0$, d.h. das System bewegt sich zum Ausgangszeitpunkt mit einer endlichen Geschwindigkeit durch die Ruhelage. Die linearisierten und integrierten MHD-Gleichungen lauten dann:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho_0 \vec{v}_1) \rightarrow \rho_1 = -\nabla \cdot (\rho_0 \vec{\xi}) \quad (3.38)$$

d.h. eine Dichteänderung wird durch Kompression des Volumenelementes herbeigeführt (Kontinuitätsgleichung).

Mit dieser Gleichung ergibt sich die linearisierte Adiabatangleichung zu

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = -p_0 \gamma \nabla \cdot \vec{v}_1 - \vec{v}_1 \cdot \nabla p_0 \rightarrow p_1 = -p_0 \gamma \nabla \cdot \vec{\xi} - \vec{\xi} \cdot \nabla p_0 \quad (3.39)$$

d.h. Druckänderung geschieht entweder durch adiabatische Kompression oder durch Auslenkung eines Volumenelementes in ein Gebiet höheren oder niedrigeren Druckes.

Kombination des Faradayschen Gesetzes mit dem idealen Ohmschen Gesetz ergibt

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0) \rightarrow \vec{B}_1 = \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \quad (3.40)$$

Diese Gleichung besagt, daß eine Auslenkung des Plasmas senkrecht zum Gleichgewichtsmagnetfeld ein elektrisches Feld induziert, welches wiederum zu einer Änderung des Magnetfeldes führt.

Die linearisierte Kraftgleichung lautet schließlich

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{j}_0 \times \vec{B}_1 + \vec{j}_1 \times \vec{B}_0 - \nabla p_1 \quad (3.41)$$

Wir können nun p_1 durch Gl. (3.39) und \vec{j}_1 aus dem Ampèreschen Gesetz $\mu_0 \vec{j}_1 = \nabla \times \vec{B}_1$ ersetzen und erhalten die MHD-Kraftgleichung in der Form

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}_0) \times \vec{B}_1 + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}_1) \times \vec{B}_0 + \nabla (p_0 \gamma \nabla \cdot \vec{\xi} + \vec{\xi} \cdot \nabla p_0) \quad (3.42)$$

Hier taucht neben den Gleichgewichtsgrößen zwar noch das gestörte Magnetfeld auf, dieses kann aber über Gl. (3.40) auch auf $\vec{\xi}$ zurückgeführt werden. Damit haben wir eine Gleichung für $\vec{\xi}$ erhalten, die symbolisch auch als

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = \vec{F}(\vec{\xi}) \quad (3.43)$$

geschrieben werden kann, wobei wir die rechte Seite durch $\vec{F}(\vec{\xi})$, den MHD-Kraftoperator abgekürzt haben. Diese Bewegungsgleichung ist somit von der Form 'Masse mal Beschleunigung = Kraft'.

Da alle Koeffizienten zeitunabhängig sind, können wir wiederum in der Zeit eine Fouriertransformation anwenden

$$f(\vec{x}, t) = f(\vec{x}) e^{-i\omega t} \quad (3.44)$$

Damit ergibt die Kraftgleichung das Eigenwertproblem

$$-\omega^2 \rho_0 \vec{\xi} = \vec{F}(\vec{\xi}) \quad (3.45)$$

Es läßt sich zeigen, daß der Kraftoperator \vec{F} hermitesch ist. Somit sind die Eigenwerte ω^2 reell und wir erhalten als Stabilitätskriterium analog zum Rayleigh Taylor Problem

- $\omega^2 > 0$: Dann ist ω reell und nach (3.44) führt das System Oszillationen um die Ruhelage aus. Dieser Fall entspricht der Stabilität.
- $\omega^2 < 0$: Dann ist ω imaginär und nach (3.44) existiert eine exponentiell anwachsende Lösung. Dieser Fall entspricht der Instabilität.

Mit Gl. (3.45) können also prinzipiell Eigenfunktionen und Anwachsrate bestimmt werden. Analog zur Rayleigh-Taylor Instabilität gestaltet sich jedoch in der Praxis das Berechnen der Eigenfunktionen im allgemeinen als aufwendiges numerisches Problem. Daher wollen wir wiederum einen Variationsausdruck herleiten, indem wir mit $\vec{\xi}$ multiplizieren und über das ganze Volumen integrieren. Es ergibt sich

$$\frac{\omega^2}{2} \int \rho_0 \xi^2 dV = -\frac{1}{2} \int \vec{\xi} \cdot \vec{F}(\vec{\xi}) dV = \delta W \quad (3.46)$$

Beide Terme haben eine einfache anschauliche Bedeutung: auf der linken Seite steht die kinetische Energie (wegen der Fouriertransformation ist $\omega \vec{\xi} = \vec{v}$), auf der rechten Seite die potentielle Energie ('Kraft mal Weg'), die wir im folgenden mit δW bezeichnen wollen. Da die kinetische Energie immer positiv ist, entscheidet schließlich das Vorzeichen von δW über die Stabilität des Systems:

$$\delta W > 0 \quad \rightarrow \quad \omega^2 > 0 \quad \rightarrow \quad \text{Stabilität} \quad (3.47)$$

$$\delta W < 0 \quad \rightarrow \quad \omega^2 < 0 \quad \rightarrow \quad \text{Instabilität} \quad (3.48)$$

Dieses Resultat ist auch anschaulich verständlich: führt die Störung zur Absenkung der potentiellen Energie, so ist das System instabil, im anderen Fall liegt Stabilität vor. Die Verhältnisse sind also analog dem Teilchen im Potential, wie in Fig. 3.1 dargestellt.

Der Ausdruck für δW kann noch in eine intuitiv einsichtige Form gebracht werden. Dazu teilt man das Integrationsgebiet in den Bereich des Plasmas (Index F für 'Fluid'), den des Vakuums (Index V) und die Grenzfläche (Index S für 'Surface') auf. Dann schreibt sich δW als

$$\delta W = \delta W_F + \delta W_S + \delta W_V \quad (3.49)$$

Die einzelnen Beiträge ergeben sich zu

$$\delta W_V = \frac{1}{2} \int_{\text{Vak.}} \frac{B_1^2}{2\mu_0} dV \quad (3.50)$$

Der Vakuumbeitrag besteht also nur aus der magnetischen Feldenergie und ist immer positiv, d.h. stabilisierend.

Der Oberflächenterm lautet

$$\delta W_S = \frac{1}{2} \int_{\text{Surf.}} (\vec{n} \cdot \vec{\xi}_\perp)^2 \vec{n} \cdot \|\nabla(p_0 + \frac{B_0^2}{2\mu_0})\| d\vec{S} \quad (3.51)$$

wobei \vec{n} den Normalenvektor darstellt und der Doppelstrich den Sprung der Größe an der Grenzfläche bezeichnet. Ein nicht verschwindender Sprung der Summe von kinetischem und magnetischem Druck bedingt einen Flächenstrom; schließen wir Fälle mit Oberflächenströmen aus, so gilt $\delta W_S = 0$. Der Index \perp bezieht sich hier und im folgenden auf das Gleichgewichtsmagnetfeld.

Der letzte Term (Volumenbeitrag des Plasmas) lautet

$$\begin{aligned} \delta W_F = \frac{1}{2} \int_{\text{Fluid}} & \left(\frac{B_{1\perp}^2}{2\mu_0} + \frac{B_{0\perp}^2}{2\mu_0} (\nabla \cdot \vec{\xi}_{1\perp} + 2\vec{\xi}_{1\perp} \cdot \vec{\kappa})^2 + \gamma p_0 (\nabla \cdot \vec{\xi})^2 \right. \\ & \left. - 2(\vec{\xi}_\perp \cdot \nabla p_0)(\vec{\kappa} \cdot \vec{\xi}_\perp) - \frac{j_\parallel}{B_0} (\vec{\xi}_\perp \times \vec{B}_0) \cdot \vec{B}_1 \right) dV \end{aligned} \quad (3.52)$$

wobei $\vec{\kappa} = (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{B}_0 / B_0$ der Krümmungsvektor des Gleichgewichtsmagnetfeldes ist.

Die Terme in der ersten Zeile von (3.52) sind alle drei positiv definit; sie haben daher stabilisierende Wirkung. Im einzelnen bedeuten sie (von links nach rechts) die mit der Auslenkung des Vakuumfeldes verbundene Energie (torsionale Alfvén-Wellen), die mit der Kompression des Magnetfeldes verbundene Energie (kompressionale Alfvén-Welle) sowie die mit der Kompression des Plasmas verbundene Änderung der inneren Energie des Gases (Schallwellen). Die Terme in der zweiten Zeile von (3.52) können sowohl positiv als auch negativ sein; sie entscheiden daher über die Stabilität des Systems. Diese beiden Terme sind von unterschiedlicher

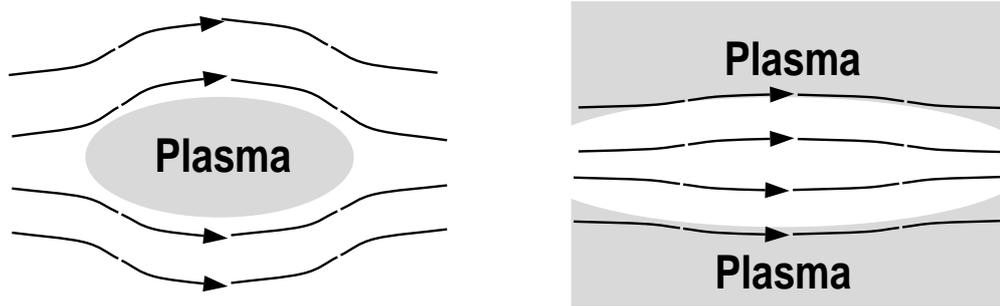


Abbildung 3.4: Austauschinstabilität im magnetischen Spiegel: ein Austausch von Plasma und Feldlinien führt im Bereich ungünstiger Krümmung zur Absenkung sowohl magnetischer als auch innerer Energie des Plasmas.

physikalischer Bedeutung, sie stellen die grundsätzlichen Quellen für MHD-Instabilitäten in Fusionsplasmen dar:

- Druckgetriebene Instabilitäten: der Term $2(\vec{\xi}_{\perp} \cdot \nabla p_0)(\vec{\kappa} \cdot \vec{\xi}_{\perp})$ beschreibt die destabilisierende Wirkung des Gradienten des kinetischen Drucks. Wie man sieht, ist der Beitrag negativ, wenn Krümmungsvektor und Druckgradient parallel sind. Sind dagegen $\vec{\kappa}$ und ∇p antiparallel, so ist der Beitrag positiv. Im Tokamak ist daher die Krümmung auf der Niedrigfeldseite ($R > R_0$) destabilisierend (sog. 'ungünstige Krümmung'), während auf der Hochfeldseite eine 'günstige Krümmung' vorliegt. Das genaue Verhalten muß aber durch Mittelung über beide Bereiche gefunden werden. Ein Beispiel für eine Anordnung, die vorwiegend ungünstige Krümmung besitzt, ist der magnetische Spiegel. Wie in Fig. 3.4 gezeigt, kann durch Austausch von Plasma und Feldlinien sowohl die Feldenergie abgesenkt werden (Verkürzung von Magnetfeldlinien) als auch die innere Energie des Plasmas verringert werden (Expansion des Plasmas). Diese sog. *Austauschinstabilität* (engl. *interchange*) führt in einer einfachen Spiegelanordnung wie in Fig. 3.4 zum schnellen Verlust des Plasmas.
- Stromgetriebene Instabilitäten: der Term $\frac{j_{\parallel}}{B_0}(\vec{\xi}_{\perp} \times \vec{B}_0) \cdot \vec{B}_1$ beschreibt Instabilitäten, welche vom Parallelstrom herrühren. Ein Beispiel ist die sog. Kink-Instabilität, welche auch in einem dünnen, von Strom durchflossenen geraden Draht beobachtbar ist: Mit zunehmender Stromstärke knickt der Draht unter Verringerung seiner Gesamtenergie wie in Fig. 3.5 gezeigt ein (diese Situation tritt auch beim Auswringen eines Handtuchs auf).

Wir haben die Instabilitäten nach der dominanten freien Energie klassifiziert; in der Praxis tritt häufig eine Mischung beider Arten auf und die Instabilität kann nur näherungsweise einer der beiden Klassen zugeordnet werden. Im nächsten Kapitel wollen wir nun das Energieprinzip auf die Tokamakkonfiguration anwenden.

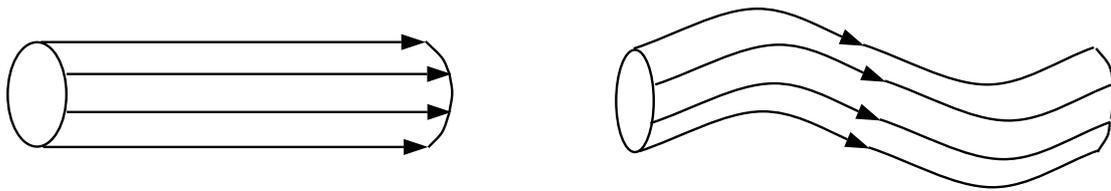


Abbildung 3.5: *Kinkinstabilität eines stromdurchflossenen Leiters.*

Kapitel 4

Ideale MHD-Stabilität des Tokamak

Wir wollen nun das Energieprinzip verwenden, um die Stabilitätseigenschaften des Tokamak zu bestimmen. Um zu einer analytisch handhabbaren Form zu kommen, wird der Tokamak dazu wieder durch einen periodischen Screw-Pinch approximiert.

4.1 Die Standardform von δW

Im periodischen Screw-Pinch kann das Energieprinzip in geschlossener Form dargestellt werden. Dazu müssen die folgenden Schritte durchgeführt werden:

- Wir nehmen an, daß keine Oberflächenströme fließen, dann verschwindet der Oberflächenterm δW_S .
- Wir führen Zylinderkoordinaten r, θ, z ein, wobei z periodisch in $2\pi R_0$ ist (dies approximiert den Torus mit Umfang $2\pi R_0$).
- Wir entwickeln die Verschiebung $\vec{\xi}$ in den periodischen Koordinaten in eine Fourierreihe, d.h.

$$\vec{\xi}(\vec{x}) = \sum_{m,n} \vec{\xi}_{m,n}(r) e^{-i(m\theta + nz/R_0)} \quad (4.1)$$

Damit können wir die Störungen nach ihrer räumlichen Periodizität, d.h. der poloidalen Modenzahl m und der toroidalen Modenzahl n kennzeichnen.

Bei der Minimierung von δW ergibt sich als Nebenbedingung $\nabla \cdot \vec{\xi} = 0$. Mit der obigen Zerlegung folgt daraus eine Beziehung zwischen ξ_θ und ξ_r , sodaß wir eine der beiden Komponenten eliminieren können. Eine längere Rechnung ergibt schließlich folgenden Ausdruck für den radialen Anteil der Verschiebung $\xi = \xi_{rm}(r)$:

$$\delta W = \frac{2\pi^2 R_0}{\mu_0} \int_0^a (f\xi'^2 + g\xi^2) dr + \left| \frac{2\pi^2 B_z^2}{\mu_0 R_0} \xi^2 \left(\frac{n^2 - \frac{m^2}{q^2}}{\frac{n^2}{R_0^2} + \frac{m^2}{r^2}} + \frac{r^2}{m} \left(\frac{m}{q} - n \right)^2 \right) \right|_{r=a} \quad (4.2)$$

Dabei stellt der erste Term das Integral über das Plasmavolumen dar (a bezeichnet wieder den kleinen Radius des Plasmas, der Strich bedeutet die radiale Ableitung), im zweiten Term sind die Terme von δW_F mit $\xi(a) \neq 0$ und der Vakuumterm δW_V zusammengefaßt. Das Gleichgewichtsmagnetfeld wurde durch B_z und den Sicherheitsfaktor q ausgedrückt, das poloidale Magnetfeld kann nach Gl. (2.44) durch $B_\theta = rB_z/(Rq)$ gewonnen werden. Die Funktionen f und g sind durch

$$f = r \frac{B_z^2}{R_0^2} \frac{\left(\frac{m}{q} - n\right)^2}{\frac{n^2}{R_0^2} + \frac{m^2}{r^2}} \quad (4.3)$$

$$g = \frac{2\mu_0 p'}{1 + \left(\frac{mR_0}{nr}\right)^2} + r \frac{B_z^2}{R_0^2} \left(\frac{m}{q} - n\right)^2 \left(1 - \frac{1}{\left(\frac{nr}{R_0}\right)^2 + m^2}\right) + \frac{2n^2 B_z^2}{rR_0^4} \frac{n^2 - \frac{m^2}{q^2}}{\left(\frac{n^2}{R_0^2} + \frac{m^2}{r^2}\right)^2} \quad (4.4)$$

gegeben.

Dies ist die sogenannte Standardform des Energieprinzips im Screw-Pinch. Bis auf die Vernachlässigung des Oberflächenstromes ist dieser Ausdruck im Screw-Pinch exakt. Für den Torus kann man diesen Ausdruck durch eine Entwicklung nach dem inversen Aspektverhältnis erhalten. Die Standardform mischt dann allerdings Terme unterschiedlicher Ordnung im inversen Aspektverhältnis. Wir haben keine leitende Wand als Begrenzung eingeführt; dies kann ebenfalls noch analytisch geschehen, soll hier aber nicht weiter verfolgt werden.

Man erkennt bereits, daß der Druck wegen $p' < 0$ im allgemeinen destabilisierend wirkt. Außerdem fällt auf, daß einige der Terme Nullstellen bei $q = m/n$ haben. Flächen, auf denen dies möglich ist, bezeichnet man daher auch als *resonante* Flächen. Hier ist die Störung genau senkrecht zum Gleichgewichtsmagnetfeld, d.h. dieses wird nicht gekrümmt. Damit fällt der im allgemeinen stabilisierende Term der Feldlinienspannung des Gleichgewichtsmagnetfeldes auf den resonanten Flächen weg; wir werden daher im folgenden vor allem an den resonanten Flächen Instabilitäten finden.

4.2 Stabilität gegen stromgetriebene Moden

Wir wollen nun die Stabilität des geraden Tokamaks gegen Kink-Instabilitäten untersuchen. Da der treibende Term für Kinks der Gradient der Gleichgewichtsstromdichte ist (siehe Kap. 3), können wir den Druckgradienten vernachlässigen. Wenn wir weiterhin von einem großen Aspektverhältnis und kleinen Modenzahlen ausgehen, gilt $(nr/R_0)^2 \rightarrow 0$, und es ergibt sich

$$\begin{aligned} \delta W = & \frac{2\pi^2 B_z^2}{\mu_0 R_0} \int_0^a [(r\xi')^2 + (m^2 - 1)\xi^2] \left(\frac{n}{m} - \frac{1}{q}\right)^2 r dr \\ & + \frac{2\pi^2 B_z^2}{\mu_0 R_0} \left(\frac{2}{q_a} \left(\frac{n}{m} - \frac{1}{q_a}\right) + (1+m) \left(\frac{n}{m} - \frac{1}{q_a}\right)^2 \right) a^2 \xi_a^2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Auf Grund des Faktors ξ_a^2 im zweiten Term ist es sinnvoll, zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich $\xi(a) \neq 0$ und $\xi(a) = 0$. Im ersten Fall ist die Grenzfläche zwischen Plasma und Vakuum von der Störung betroffen, man spricht vom *externen Kink*. Im zweiten Fall ist die Plasmaoberfläche und damit auch das Vakuummagnetfeld ungestört (sog. *interner Kink*).

4.2.1 $\xi(a) \neq 0$, externer Kink

In diesem Fall kommt der Hauptbeitrag vom Oberflächenterm (wie wir später sehen werden, kann der erste Term höchstens verschwinden, nicht aber negativ werden). Im Oberflächenterm ist der zweite Summand immer positiv, folglich entscheidet der erste Term über das Stabilitätsverhalten. Dieser Term ist positiv, wenn $n/m - 1/q_a > 0$, d.h. das Stabilitätskriterium lautet

$$m/n < q_a \quad (4.6)$$

Wir erhalten also Stabilität gegen externe Kinks, wenn die resonante Fläche mit $q(r) = m/n$ innerhalb des Plasmas liegt. Der Umkehrschluß liefert, daß Instabilität möglich ist, wenn die resonante Fläche außerhalb des Plasmas liegt. Dies ist jedoch nur ein notwendiges, aber nicht hinreichendes Kriterium, da der (positive) Beitrag der anderen Terme mitberücksichtigt werden muß. Insbesondere hängt der stabilisierende Beitrag des Integrals über das Plasmaminnere von der Form des Stromdichteprofiles ab. Einsetzen realistischer Stromdichteverteilungen ergibt, daß der externe Kink vor allem dann instabil wird, wenn die Stromdichte im Randbereich hoch ist und die resonante Fläche nahe dem Plasmarand ist (ansonsten ist der stabilisierende Beitrag des gestörten Vakuumfeldes zu groß).

Im Tokamak sind diese Verhältnisse vor allem beim Stromaufbau gegeben; dann ist die Umfangsspannung und damit auch die Stromdichte am Rand hoch. Außerdem wird normalerweise das Toroidalfeld bereits vor dem Stromhochfahren auf seinen Maximalwert eingestellt, sodaß $q(a)$ bei steigendem Strom fällt und resonante Flächen durch den Plasmarand ins Vakuum treten. In der Praxis zeigt sich, daß vor allem Instabilitäten mit $n = 1$ auftreten, daher findet man beim Stromaufbau im Tokamak gelegentlich externe Kinks mit $m \approx q$, wenn eine resonante Fläche die Plasmaoberfläche durchquert. Dies ist in Fig. 4.1 für das Tokamakexperiment ASDEX dargestellt. Diese Instabilität kann aber im allgemeinen durch geschicktes Hochfahren des Stromes vermieden werden.

Ein wichtiger Sonderfall ergibt sich für $m = 1$. Nimmt man in diesem Fall $\xi = \text{const}$ an, so verschwindet der erste Term in (4.5). Damit hängt die Stabilität hier, im Gegensatz zu den Kinks mit $m > 1$, nicht vom Stromprofil ab. Einsetzen von $m = 1$ ergibt

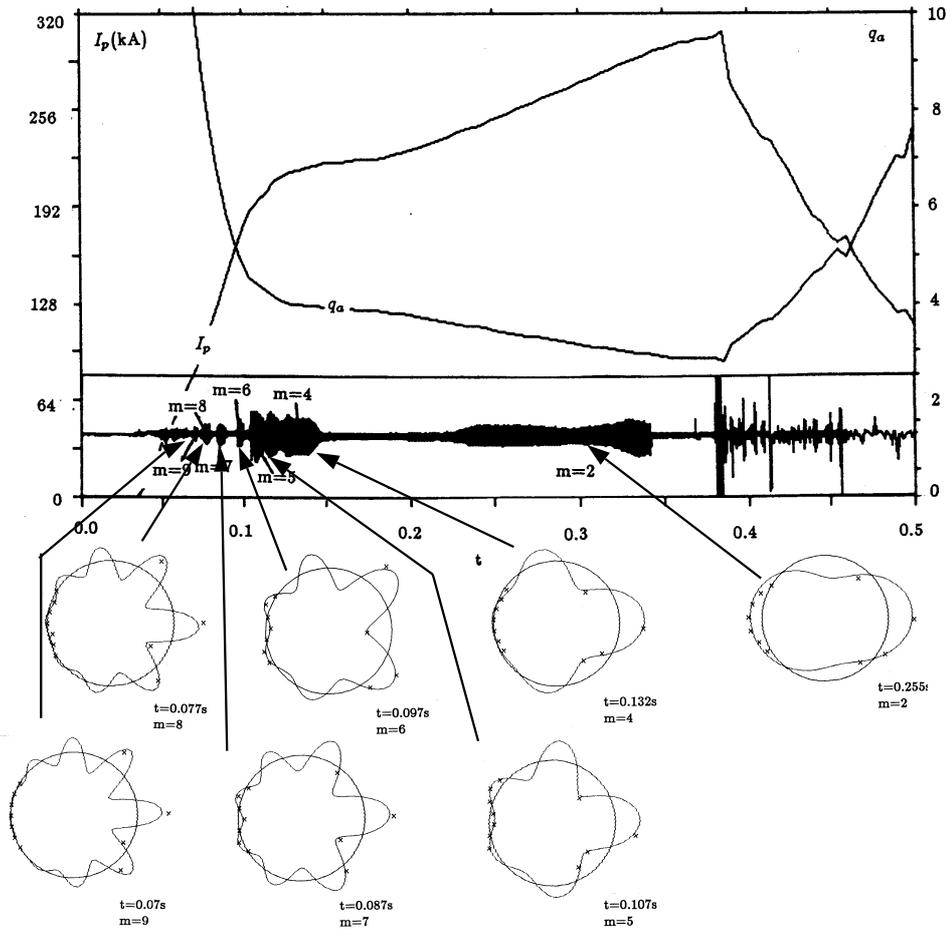


Abbildung 4.1: Ideale externe Kink-Instabilitäten beim Stromaufbau am Tokamakexperiment ASDEX. Die Rekonstruktion des gestörten Magnetfeldes zeigt das Auftreten von Moden mit $m = q_a, n = 1$, wenn q_a einen ganzzahligen Wert annimmt.

$$\delta W = \frac{4\pi^2 B_z^2}{\mu_0 R_0} n \left(n - \frac{1}{q_a} \right) a^2 \xi_a^2 \quad (4.7)$$

Daraus folgt als notwendiges und hinreichendes Kriterium für Instabilität $q_a < 1/n$. Dieses Kriterium ist am restriktivsten für $n = 1$, es ergibt sich das sog. Kruskal-Shafranov Limit $q_a \geq 1$. Dieses Limit begrenzt für gegebenes Toroidalfeld den maximalen Plasmastrom. In der Praxis tritt jedoch bereits bei $q_a = 2$ eine Instabilität auf, welche die Tokamakentladung beendet (sog. Disruption).

4.2.2 $\xi(a) = 0$, interner Kink

Für den internen Kink ist $\xi(a) = 0$, damit bleibt in (4.5) nur das Integral über das Plasmainnere übrig. Für $m > 1$ ist der Beitrag immer positiv und wir finden, daß das Plasma generell stabil gegen interne Kink-Moden mit $m > 1$ ist. Im Fall $m = 1$ können wir wiederum $\xi = \text{const.}$ wählen, um δW zu minimieren. Allerdings steht dieser Ansatz im Widerspruch zu $\xi(a) = 0$. Wir müssen also ein ξ wählen, das irgendwo im Plasma vom konstanten Wert auf Null abfällt. Geschieht dies an der $q = 1$ Fläche, so verschwindet der Beitrag zu δW wegen der Nullstelle von $n/m - 1/q$. Somit gilt $\delta W = 0$ für eine Testfunktion, welche innerhalb der $q = 1$ Fläche konstant ist und außerhalb verschwindet. Wie Fig. 4.2 verdeutlicht, entspricht dies einer Versetzung des Zentralplasmas innerhalb der $q = 1$ Fläche.

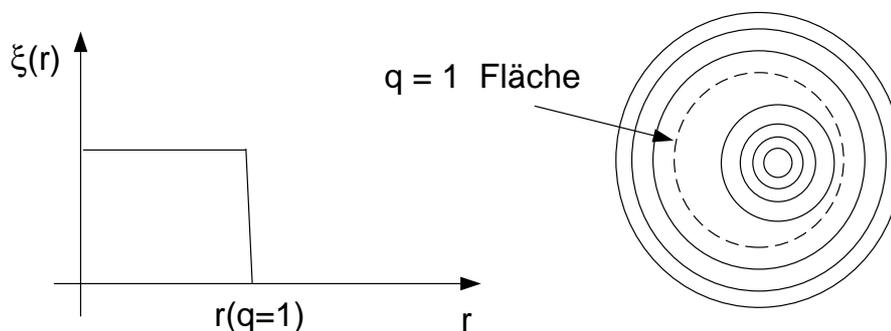


Abbildung 4.2: *Eigenfunktion der internen Kink-Instabilität (links). Die Instabilität führt zu einer Versetzung des Plasmas innerhalb der $q = 1$ -Fläche (rechts).*

Da $\delta W = 0$, muß die nächste Ordnung der Entwicklung nach dem Aspektverhältnis Aufschluß über die Stabilität geben. Man findet tatsächlich, daß die (1,1) interne Kink-Mode für realistische Stromprofile für $q(0) < 1$ oftmals instabil sein sollte. Im Experiment ergibt sich oftmals eine (1,1) interne Kink-Mode, sobald $q(0)$ unter 1 sinkt. Das Stabilitätskriterium für die ideale interne Kink-Instabilität lautet also

$$q(0) > 1 \quad (4.8)$$

Die Sonderrolle der (1,1) rührt von ihrer besonderen Struktur her: bei dieser Störung ist die Topologie der Störung gleich der Topologie der Gleichgewichtsflußflächen, sodaß eine Verformung besonders leicht möglich ist.

Die ideale MHD-Stabilität des Tokamak gegen stromgetriebene Moden läßt sich somit wie folgt zusammenfassen:

- Das Plasma ist stabil gegen externe Kink-Moden, wenn die resonante Fläche innerhalb des Plasmas liegt (dies ändert sich, wenn im Plasma endliche Resistivität berücksichtigt wird). Instabilität ergibt sich vor allem, wenn die resonante Fläche im Vakuum nahe der

Plasmaoberfläche liegt und außerdem die Stromdichte in der Nähe des Plasmarandes hohe Werte aufweist.

- Aus der Forderung nach idealer externer Kink-Stabilität folgt $q_a > 1$ (Kruskal-Shafranov Limit). Dies begrenzt für vorgegebenes Toroidalfeld den möglichen Gesamtstrom.
- Der interne Kink ist stabil für $m > 1$. Für $m = 1$ ist er im allgemeinen instabil für $q(0) < 1$. Dies begrenzt wegen $q(0) = (2B_z)/(\mu_0 R_0 j(0))$ die Stromdichte auf der Achse.

Unter Hinzunahme des Druckterms in Gl. (4.2) können sich bei ausreichendem β auch in der idealen MHD interne Kink-Moden mit $m > 1$ ergeben (sog. 'infernal modes').

4.3 Stabilität gegen druckgetriebene Moden

Wir wollen nun die Stabilität gegen druckgetriebene Moden untersuchen. Im Energiefunktional ergeben sich unter Beibehaltung des p' -Terms neue Instabilitäten. Im Gegensatz zu den Kinks, bei denen im wesentlichen die ganze Plasmasäule betroffen ist, handelt es sich hier um lokalisierte Instabilitäten, bei denen ξ nur lokal von Null verschieden ist. Dies ergibt sich aus der bereits getroffenen Feststellung, daß in der Nähe einer resonanten Fläche mit $q \approx m/n$ der stabilisierende Beitrag der Feldlinienkrümmung verwindet, sodaß der (negative) p' Term die anderen Terme überwiegen kann. Wir werden es bei druckgetriebenen Moden also vor allem mit lokalisierten Störungen, welche sich längs der Gleichgewichtsfeldlinien auf resonanten Flächen ausbreiten, zu tun haben. Diese Störungen entsprechen den bereits in Kapitel 3 besprochenen Austausch- oder Interchange-Instabilitäten.

4.3.1 Lokalisierte Interchange Moden

Im Zylinder ist B_z gerade, B_θ ist dagegen ungünstig gekrümmt. Wir erwarten daher nach Kapitel 3 bei geringer Verscherung des Magnetfeldes das Auftreten einer Interchange-Instabilität, die nach den obigen Vorbemerkungen an den resonanten Flächen lokalisiert ist.

Zur Berechnung dieser Instabilität nehmen wir an, daß wegen der Lokalisierung $\xi(a) = 0$ gilt. Dann müssen wir nur das Volumenintegral in Gl. 4.2 berücksichtigen. Weiterhin können wir $q(r)$ in der Nähe der resonanten Fläche entwickeln, d.h. $q(r) = q(r_{res}) + q'(r_{res})(r - r_{res})$. Die besondere Stellung der resonanten Flächen besteht darin, daß wegen $m/n = q(r_{res})$ der zweite und dritte Summand im Ausdruck für g (Gl. (4.4)) an der resonanten Fläche verschwinden. Damit ist g durch den Druckterm p' bestimmt. Man erhält nach der Linearisierung (wenn auch noch $nr/(mR_0) = B_\theta/B_z \ll 1$ vernachlässigt wird)

$$f(r) \approx \frac{r_{res}^3 B_z^2}{q^2 R_0^2} \left(\frac{q'}{q} \right)^2 (r - r_{res})^2 \quad (4.9)$$

$$g(r) \approx \frac{r_{res}^2 2\mu_0 p'}{R_0^2 q^2} \quad (4.10)$$

Damit liegt δW explizit als $\delta W(\xi, \xi', r)$ vor und man kann das Variationsproblem analog zur Lagrangeschen Formulierung der Mechanik in eine Euler-Lagrangesche Differentialgleichung für ξ umschreiben. Variation von δW nach den (formal unabhängigen) Funktionen ξ und ξ' ergibt

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(f\xi'^2 + g\xi^2) - \frac{d}{dr}\left(\frac{\partial}{\partial \xi'}(f\xi'^2 + g\xi^2)\right) = 0 \rightarrow g\xi - \frac{d}{dr}(f\xi') = 0 \quad (4.11)$$

oder, wenn die neue Variable $x = r - r_{res}$ eingeführt wird:

$$-\frac{2\mu_0 p'}{r_{res} B_z^2} \left(\frac{q}{q'}\right)^2 \xi(x) + \frac{d}{dx}(x^2 \xi'(x)) = 0 \rightarrow D\xi + 2x\xi' + x^2 \xi'' = 0 \quad (4.12)$$

wobei wir noch $D = -(2\mu_0 p')/(r_{res} B_z^2)(q/q')^2$ gesetzt haben (wegen $p' < 0$ ist diese Größe positiv). Diese Differentialgleichung läßt sich durch einen Polynomansatz $\xi(x) = x^k$ lösen. Man erhält

$$D + k + k^2 = 0 \rightarrow k = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - D} \quad (4.13)$$

Die so gewonnenen Funktionen $\xi(x)$ minimieren δW in der Nähe der resonanten Fläche. Sie stellen somit einen sinnvollen Ansatz für eine Testfunktion $\xi(r)$ dar. Einsetzen dieser Testfunktion in den exakten Ausdruck für δW ergibt dann eine Aussage über die Stabilität des Systems gegen die Localized Interchange Instabilität.

Ist $D < 1/4$, so ist k reell und negativ. Die Lösungen sind bei $x = 0$ singularär. Wir können daher diese Lösung nicht zulassen. Man kann jedoch $\xi(r)$ willkürlich in der Nähe des Ursprungs begrenzen und dann das so erhaltene ξ als Testfunktion verwenden. In diesem Fall erhält man $\delta W > 0$, d.h. das System ist stabil.

Für $D > 1/4$ ist k komplex und ξ ist von der Form

$$\xi(x) = \xi_0 \frac{1}{\sqrt{|x|}} \cos(\sqrt{D - 1/4} \ln|x|) \quad (4.14)$$

Diese Funktion ist in Fig. 4.3 dargestellt.

Wieder kann man diese Funktion begrenzen und als Testfunktion verwenden. Dies geschieht so, daß ξ außerhalb eines bestimmten Bereiches verschwindet und in der Nähe der resonanten Fläche konstant ist. Diese Funktion ist ebenfalls in Fig. 4.3 dargestellt. Für diese Art von Testfunktion findet man Instabilität, d.h. das Stabilitätskriterium für den lokalisierten Interchange ist

$$-\frac{8\mu_0 p'}{r_{res} B_z^2} < \left(\frac{q'}{q}\right)^2 \quad (4.15)$$

Dieses Kriterium wird als *Suydam-Kriterium* bezeichnet. Es demonstriert die stabilisierende Wirkung der magnetischen Verscherung q' : Für gegebenes q' gibt es einen maximal zulässigen Druckgradienten p' .

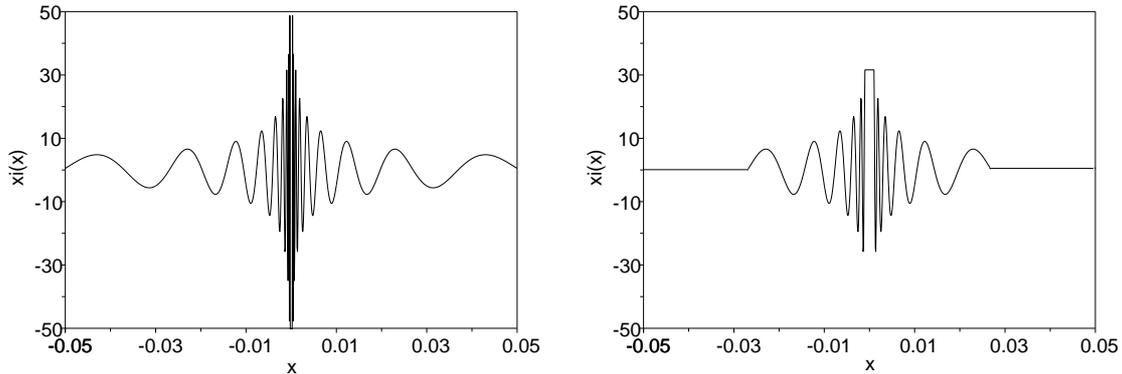


Abbildung 4.3: Lösung der Euler-Lagrange Gleichung (links) und daraus abgeleitete Testfunktion, welche zur Instabilität führt (rechts).

Das für den zylindrischen Screw-Pinch hergeleitete Suydam-Kriterium erfährt im Torus eine Änderung. Dies liegt daran, daß im Torus das Toroidalfeld nicht mehr gerade, sondern auf der Außenseite ungünstig und auf der Innenseite günstig gegen das Plasma gekrümmt ist. Die Stabilitätseigenschaften ergeben sich daher durch eine Mittelung längs der Feldlinie. Dies führt zum sogenannten *Mercier-Kriterium*

$$-\frac{8\mu_0 p'}{r_{res} B_z^2} (1 - q^2) < \left(\frac{q'}{q}\right)^2 \quad (4.16)$$

In diesem Fall liegt also für $q > 1$ (und für den üblichen Fall eines nach außen abfallenden Druckprofils) generell Stabilität vor. Da im Tokamak Gebiete mit $q < 1$ meist auch instabil gegen den internen Kink sind und oftmals vermieden werden, ist das Mercier-Kriterium in Tokamaks oftmals über große Bereiche des Plasmas erfüllt, und es treten keine lokalisierten Interchange-Moden auf. Es gibt jedoch auch in Torusgeometrie eine druckgetriebene Instabilität, welche ein hartes Limit darstellt. Diese sogenannte *Ballooning-Instabilität* wollen wir im nächsten Abschnitt untersuchen.

4.3.2 Ballooning Instabilitäten

Wir haben gesehen, daß im Torus die Interchange-Instabilität für $q > 1$ generell stabil ist. Für großen Druck brechen jedoch die oben angeführten Näherungen zusammen und es ergibt sich eine andere druckgetriebene Instabilität. Diese beruht auf dem destabilisierenden Effekt der ungünstigen Krümmung auf der Torusaußenseite. Läßt man zu, daß sich die Instabilität nicht genau parallel zu den Feldlinien ausbreitet (d.h. $k_{\parallel} \neq 0$), so kann die Amplitude der Störung längs der Feldlinie variieren und die Instabilität konzentriert sich auf der Torusaußenseite. Die dabei gewonnene Energie kann bei ausreichendem Druckgradienten die zur Krümmung des Gleichgewichtsfeldes notwendige Energie übersteigen. Solche Instabilitäten nennt man wegen ihrer räumlichen Struktur (Auslenkung auf der Niedrigfeldseite) *Ballooning-Instabilitäten*.

Auch für die Ballooning-Instabilität ist das Stabilitätskriterium durch eine Beziehung zwischen Druck und Verscherung gegeben. Sie wird häufig für den normierten Druck

$$\alpha = -\frac{2\mu_0 R_0}{B^2} q^2 \frac{dp}{dr} \quad (4.17)$$

($B^2/(2\mu_0)$ ist der Druck des Gleichgewichtsfeldes) und die normierte Verscherung

$$s = \frac{r dq}{q dr} \quad (4.18)$$

angegeben (sog. $s - \alpha$ -Diagramm). Ein solches $s - \alpha$ -Diagramm ist in Fig. 4.4 gezeigt.

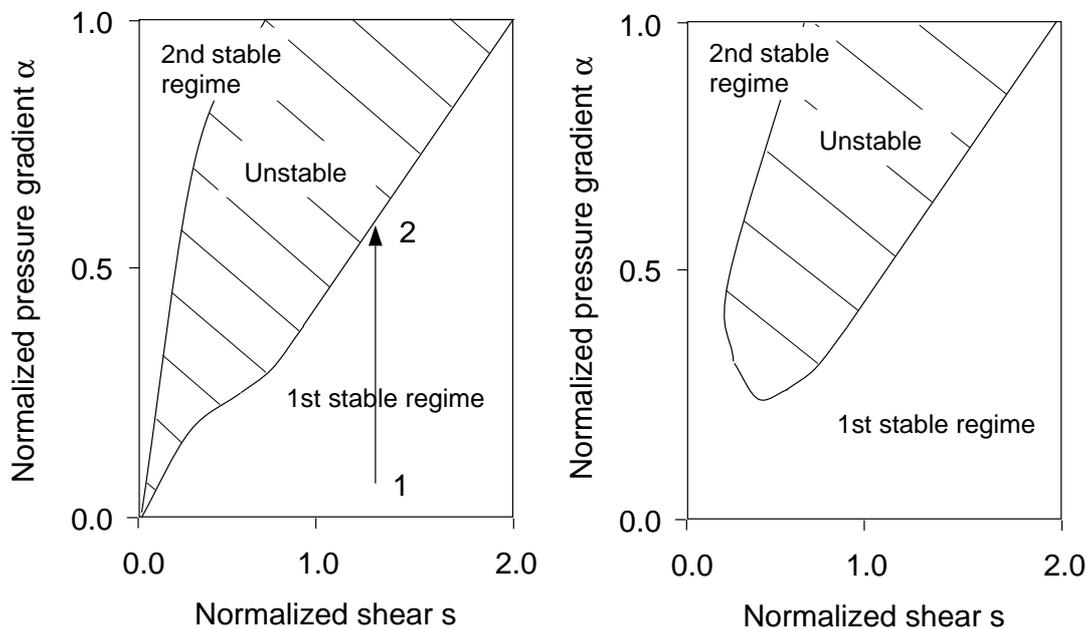


Abbildung 4.4: Stabilitätsdiagramm von Ballooning-Moden bei kreisförmigen Flußflächen (links) und für Flußflächen, welche Elongation und Triangularität aufweisen (rechts).

Im Fall kreisförmiger Flußflächen läßt sich die stabile Region ('1st stability') für nicht zu kleine s näherungsweise durch $s = 0.6\alpha$ beschreiben. Man erkennt, daß es noch einen zweiten Bereich der Stabilität gibt ('2nd stability'), in dem der Druck nicht durch Ballooning-Instabilitäten begrenzt ist. Das Auftreten dieses Gebietes kommt durch die in Kapitel 2 beschriebene Verschiebung der Flußflächen zur Kompensation der Hoop-Force zustande (Shafranov-Shift). Diese Verschiebung verstärkt das Poloidalfeld auf der Niedrigfeldseite und schwächt es auf der Hochfeldseite. Dadurch hält sich eine Feldlinie bei ihrem Umlauf um den Torus mit steigendem Druck im Mittel immer länger im Gebiet günstiger Krümmung auf, bis schließlich dieser stabilisierende Einfluß überwiegt und jenseits eines bestimmten Druckes

wiederum Stabilität gegen Ballooning-Moden auftritt. Das Gebiet der zweiten Stabilität ist aber für kreisförmige Querschnitte nicht zugänglich (linke Seite von Fig. 4.4).

Formt man dagegen den Plasmaquerschnitt durch Elongation und Triangularität, so hält sich die Feldlinie auf einer Flußfläche noch häufiger im Bereich guter Krümmung auf. Schließlich kann ein Bereich auftreten, in dem man bei niedriger Verscherung s ins zweite Stabilitätsgebiet vorstoßen kann (rechte Seite von Fig. 4.4). Daher erwartet man in Plasmen mit nichtkreisförmigem Querschnitt eine erhöhte Stabilität gegen druckgetriebene Moden. Dies drückt sich experimentell in einem höheren erreichbaren Maximalwert von β aus. Auf dieses sogenannte β -Limit soll im nächsten Abschnitt eingegangen werden.

4.3.3 Das β -Limit

Mit den oben angegebenen Stabilitätskriterien kann eine Grenze für das in Tokamaks erreichbare β angegeben werden. Dazu schreibt man β als

$$\beta = \frac{4\mu_0 \int_0^a p(r) r dr}{a^2 B^2} = -\frac{\int_0^a \alpha r^2 / q^2 dr}{R a^2} = 0.3 \frac{1}{a^2 R} \int_0^a \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{q^2} \right) r^3 dr \quad (4.19)$$

wobei wir im ersten Schritt partiell integriert haben (wegen $p'(0) = 0$ und $p(a) = 0$ verschwindet der Randterm) und die Definition von α verwendet haben. Im zweiten Schritt wurde dann die oben angegebene Näherung für den ersten Stabilitätsbereich, $\alpha = 0.6s$ verwendet.

Der Ausdruck (4.19) illustriert noch einmal die Rolle der Verscherung. Man erhält also für gegebenes B_t und I_p und damit $q(a)$ maximales β für maximalen Abfall von q , d.h. minimales $q(0)$. Dies wird erreicht durch Konzentration des Stromes auf der Achse (da $q(0) \sim 1/j(0)$). Zusätzlich zur Ballooning-Stabilität hat man jedoch auch die Stabilität gegen den internen Kink zu beachten, d.h. $q(0) \geq 1$. Ein für maximales β optimiertes Stromprofil erzeugt daher $q(0) = 1$. Weiterhin sollte der Druckabfall möglichst weit außen erfolgen. Dies wird erreicht, indem q über einen möglichst weiten Bereich des kleinen Radius konstant gehalten wird (hier ist dann wegen $dq/dr = 0$ auch $p' = 0$, d.h. $p = p(0)$). Wegen

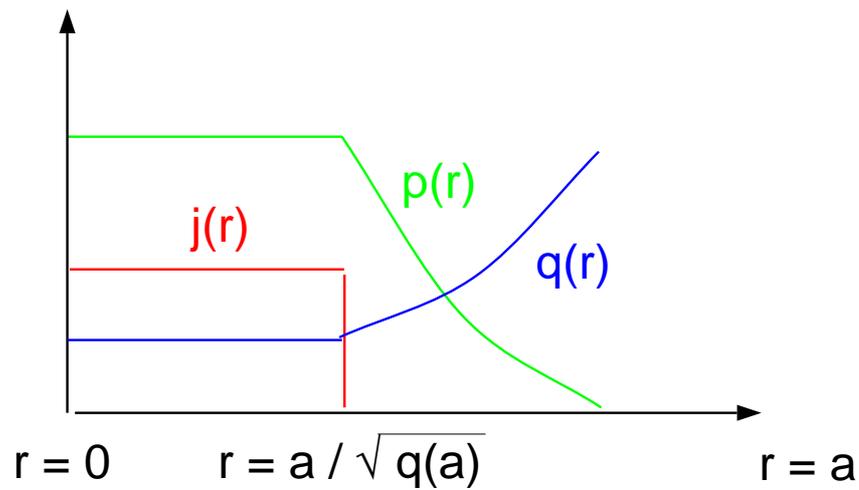
$$q = \frac{r B_t}{R B_\theta} = \frac{2\pi r^2 B_t}{\mu_0 I(r) R} \quad (4.20)$$

bedeutet dies $I(r) \sim r^2$, d.h. $j(r) = \text{const} = j(0)$. Aus $q(0) = (2B_t)/(\mu_0 R j(0))$ erhalten wir wegen $q(0) = 1$ für die Stromdichte $j(0) = (2B_t)/(\mu_0 R)$. Damit berechnet sich der Radius r_{abf} , an dem die Stromdichte von $j(0)$ auf Null abfällt, wegen $\pi r_{abf}^2 j(0) = I_p$ zu

$$r_{abf} = \sqrt{\frac{\mu_0 I_p R}{2\pi B_t}} \rightarrow \frac{r_{abf}}{a} = \frac{1}{\sqrt{q(a)}} \quad (4.21)$$

Innerhalb diese Radius ist somit $q = 1$, außerhalb steigt q nach Gl. (4.20) wegen $I(r) = I_p$ quadratisch an. In dieser Region geschieht der Druckabfall. Die Verhältnisse sind in Fig. 4.5 dargestellt.

Berechnet man nun β , so erhält man

Abbildung 4.5: Optimierte Profile für maximales β .

$$\beta = 1.2 \frac{a}{Rq_a^2} (\sqrt{q_a} - 1) \quad (4.22)$$

Für $q_a \geq 3$ kann diese Funktion gut durch

$$\beta[\%] = 5.6 \frac{I_p[\text{MA}]}{a[\text{m}]B[\text{T}]} \quad (4.23)$$

angenähert werden. Diese Parameterabhängigkeit wurde auch in realistischeren numerischen Optimierungen gefunden. Allerdings ergibt sich für realistischere Stromprofile, in denen q kontinuierlich vom Zentrum weg ansteigt, im kreisförmigen Fall der Vorfaktor 2.8 (sog. Troyon-Limit). Allgemein kann man die in Tokamaks erreichten β -Werte durch

$$\beta_N = \frac{\beta}{I/(aB)} \quad (4.24)$$

(‘normalized beta’) ausdrücken, wobei der Maximalwert von β_N von der Geometrie und der Stromprofilform abhängt. Die von der Theorie vorhergesagten Maximalwerte von β werden im Experiment bestätigt.

Kapitel 5

Resistive MHD-Stabilität

Bisher haben wir ideale MHD Störungen untersucht, bei denen die Bewegung des Plasmas flußerhaltend erfolgte. Im Gegensatz dazu kann unter Berücksichtigung der Leitfähigkeit im Ohm'schen Gesetz auch Fluß erzeugt oder vernichtet werden. Dadurch kann sich die Topologie der Flußflächenstruktur ändern. Die resistive MHD erlaubt also eine neue Klasse von Instabilitäten, die in der idealen MHD nicht zugänglich ist. Dies äußert sich auch in einer veränderten Gleichung für \vec{B}_1 :

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v}_1 \times \vec{B}_0 - \frac{1}{\sigma} \vec{j}_1) \quad (5.1)$$

Im Gegensatz zu Gl. (3.40) kann jetzt ein gestörtes Magnetfeld nicht nur durch Strömen senkrecht zum Gleichgewichtsfeld erzeugt werden (wie z.B. beim Kink), sondern auch durch einen Störstrom, der auf Grund der endlichen Leitfähigkeit ein E -Feld bedingt.

Die Zeitskala der resistiven MHD läßt sich wie folgt abschätzen: Aus dem Ampèreschen Gesetz folgt durch nochmalige Bildung der Rotation

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{B}) - \Delta \vec{B} = \mu_0 \nabla \times \vec{j} = \mu_0 \sigma \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.2)$$

wobei wir zur Vereinfachung eine konstante Leitfähigkeit angenommen haben. Gl. (5.2) ist eine Diffusionsgleichung für das Magnetfeld mit Diffusionskoeffizient $D_{mag} = 1/(\mu_0 \sigma)$. Daraus können wir eine charakteristische Zeit erhalten, indem wir Diffusion über eine charakteristische Länge L betrachten:

$$\tau_R = \mu_0 \sigma L^2 \quad (5.3)$$

Der Fluß im Plasma ändert sich also auf der Zeitskala τ_R ; auf kleineren Zeitskalen gilt Flußerhaltung und damit die ideale MHD. Für heiße Plasmen ist τ_R viel länger als die Alfvénzeitskala: während τ_A für $B = 2$ T und $n = 10^{20} \text{ m}^{-3}$ für ein Wasserstoffplasma bei $a = 0.5$ m nach Gl. (1.46) bei $0.1 \mu\text{s}$ liegt, erhalten wir für $T = 1$ keV und unter Verwendung der Spitzerleitfähigkeit $D_{mag} \approx 0.02 \text{ m}^2/\text{s}$ und somit $\tau_R = 12.5$ s. Damit scheint zunächst die

Berücksichtigung resistiver Instabilitäten nicht notwendig. Es gibt jedoch eine Klasse von resistiven MHD-Instabilitäten, bei denen sich das Plasma im wesentlichen ideal verhält, an der resonanten Fläche jedoch auf Grund der endlichen Leitfähigkeit Fluß erzeugt oder vernichtet. Solche Instabilitäten sind in der idealen MHD nicht enthalten. Hier ist die resistive Zeitskala durch die Breite der stromführenden Schicht an der resonanten Fläche gegeben. Diese kann z.B. 1 cm breit sein; dann ergibt sich $\tau_R = 5$ ms. Auf dieser Zeitskala können die sogenannten *Tearing-Moden*, welche das resistive Analogon zum idealen internen Kink sind, anwachsen. Oftmals findet man jedoch, dass resistive Instabilitäten noch schneller anwachsen, als durch diese Zeitskala bestimmt (in der Astrophysik ist dies sogar der Normalfall). Zur Erklärung solcher Rekonnektionsphänomene muss man die detaillierten Vorgänge in der Schicht betrachten. Man findet, dass die Rekonnektionsrate deutlich erhöht sein kann. Dies wollen wir im folgenden untersuchen.

5.1 Rekonnektion von Flusschichten

Zunächst betrachten wir eine Schicht, in der das Magnetfeld sein Vorzeichen wechselt, d.h. Bereiche mit entgegengesetzter Orientierung des Magnetfeldes nebeneinander liegen. In solchen Bereichen kann die innere Energie durch Rekonnektion, d.h. Aufbrechen und Wiederverbinden von Feldlinien, abgesenkt werden. Die damit verbundene Instabilität heisst deshalb *Tearing Mode* ('Zerreißen von Magnetfeldlinien'). Es entstehen sogenannte magnetische Inseln, topologisch separate Bereiche entlang der $B = 0$ Linie (näheres zu den magnetischen Inseln in Kap. 5.3). In diese strömt das Plasma durch den sogenannten X-Punkt ein. Dieser Vorgang ist schematisch in Fig. 5.1 dargestellt.

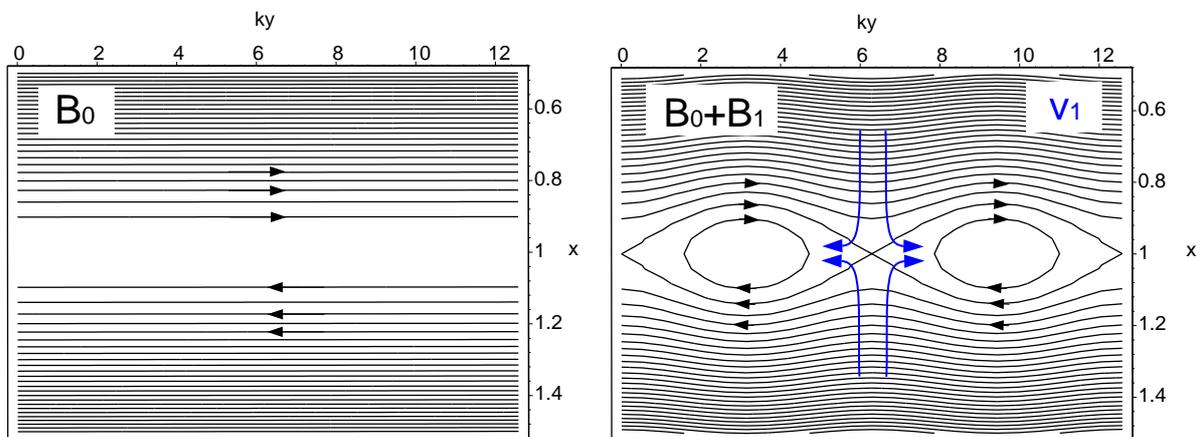


Abbildung 5.1: *Rekonnektion von Flusschichten mit unterschiedlichem Vorzeichen des Magnetfelds (Tearing-Instabilität). Es bilden sich magnetische Inseln aus, in die das Plasma durch den X-Punkt einfließt.*

Dabei nehmen wir an, dass das System in x -Richtung die Ausdehnung L hat und in y -Richtung durch die Wellenlänge der Störung (Wellenzahlvektor $k = 2\pi/\lambda$) charakterisiert sei. Das Ma-

gnettefeld variere in dieser einfachen Geometrie linear um die $B = 0$ Linie, welche bei $x = x_s$ liege:

$$B_0 = B_{0y} \frac{x - x_s}{L} \quad (5.4)$$

Wir nehmen nun an, dass das Plasma durch eine externe Kraft F_{ext} in x -Richtung auf die $x = x_s$ Fläche zu bewegt werde. Weit von x_s entfernt gilt die ideale MHD und die Magnetfeldlinien bewegen sich mit dem Plasma. Dies lässt sich auch wie folgt sehen: Nehmen wir an, dass das Plasma vom Magnetfeld entkoppeln könnte, so ändert sich B nicht und im Ohmschen Gesetz gilt $E = 0$, sodass die Bewegung einen Strom hervorruft:

$$j_{1z} = \sigma v_{1x} B_{0y} \quad (5.5)$$

Dieser Strom führt über $\vec{j} \times \vec{B}$ zu einer Rückstellkraft

$$F_x = \sigma v_{1x} B_{0y}^2 \quad (5.6)$$

In der idealen MHD ($\sigma \rightarrow \infty$) wird diese Rückstellkraft unendlich gross und eine Entkopplung der Plasmaströmung vom Magnetfeld ist nicht möglich. Dieses Resultat hatten wir auch in Kapitel 1 erhalten ('eingefrorener Fluss'). In der Nähe der $B = 0$ Linie ($x = x_s$) gilt dieses Argument jedoch nicht mehr, da mit $B \rightarrow 0$ auch für grosse σ bei Annäherung an x_s die Rückstellkraft unter die externe Kraft fällt. In der resistiven Schicht entkoppelt also die Plasmaströmung vom Magnetfeld und biegt in y -Richtung um. Die Dicke δ dieser Schicht bestimmt sich gerade daraus, dass bei $x = x_s \pm \delta$ die externe Kraft gleich der Rückstellkraft ist

$$F_{ext} = F_x = \sigma v_{1x} B_{0y}^2 (x_s \pm \delta) = \sigma v_{1x} B_{0y}^2 \left(\frac{\delta}{L}\right)^2 \quad (5.7)$$

Mit der Bewegung des Plasmas gegen die Kraft ist eine Leistung $P = vF$ verbunden:

$$P = F_x v_{1x} = \sigma v_{1x}^2 B_{0y}^2 \left(\frac{\delta}{L}\right)^2 \quad (5.8)$$

Diese Leistung können wir mit der Leistung gleichsetzen, die zur Beschleunigung des Plasmas in der Schicht aufgewendet werden muss. Diese Beschleunigung durch das Anwachsen der Instabilität mit Anwachsrate γ kommt vom Einfließen des Plasmas in die neu entstehenden Bereiche im Inneren der Insel und ist letztlich neben der Dissipation von Fluss das bestimmende Element für die Zeitskala, auf der die Instabilität anwächst. Für eine inkompressible Strömung gilt

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\delta} v_{1x} + k v_{1y} = 0 \quad (5.9)$$

und wegen $\delta k \ll 1$ (Schichtdicke viel kleiner als Wellenlänge der Instabilität) ist $v_{1y} \gg v_{1x}$. Die Leistung, die zur Beschleunigung des Plasmas aufgewendet wird, ist daher

$$\gamma \rho v_{1y}^2 = \gamma \rho \frac{v_{1x}^2}{(\delta k)^2} \quad (5.10)$$

Gleichsetzen von (5.8) und (5.10) ergibt eine Gleichung für die Schichtdicke:

$$\delta = \left(\frac{\gamma \rho L^2}{\sigma k^2 B_{0y}^2} \right)^{1/4} \quad (5.11)$$

Hier taucht aber noch die unbekannte Anwachsrate auf. Diese kann wie folgt mit dem Stabilitätsparameter der Tearing Mode Δ' verknüpft werden: Das Anwachsen der Instabilität führt zu einer Änderung des Magnetfelds in der Schicht. Insbesondere bedeutet die Ausbildung von Inseln auch das Entstehen einer x -Komponente von B_1 und mit dem Faradayschen Gesetz gilt:

$$\gamma B_{1x} = k E_{1z} = \frac{k}{\sigma} j_{1z} \quad (5.12)$$

Hier haben wir im Ohmschen Gesetz den $\vec{v} \times \vec{B}$ Term vernachlässigt, da ja hier nach Voraussetzung das elektrische Feld von der resistiven Komponente dominiert wird (Abweichung von der idealen MHD). Aus dem Ampereschen Gesetz lässt sich für eine dünne Schicht j_{1z} durch den Sprung der Tangentialkomponente von B ausdrücken:

$$\mu_0 j_{1z} = \frac{B_{1y}^+ - B_{1y}^-}{\delta} \quad (5.13)$$

wobei die Indices $+$ und $-$ die obere bzw. untere Schichtkante bezeichnen. Wir erhalten also

$$\gamma = \frac{1}{\mu_0 \sigma \delta} \frac{k(B_{1y}^+ - B_{1y}^-)}{B_{1x}} = \frac{1}{\mu_0 \sigma \delta} \Delta' \quad (5.14)$$

wobei wir im letzten Schritt den Stabilitätsparameter Δ' eingeführt haben. Er entscheidet über die Stabilität des Systems, da das Vorzeichen der Anwachsrate vom Vorzeichen von Δ' bestimmt wird. Wir können jetzt (5.14) in (5.11) einsetzen und erhalten eine Gleichung für die Schichtdicke

$$\delta = \left(\frac{\Delta' \rho L^2}{\mu_0 \sigma^2 k^2 B_{0y}^2} \right)^{1/5} \quad (5.15)$$

Dieses Ergebnis kann noch durch Verwenden der typischen Zeitskalen $\tau_R = \mu_0 \sigma L^2$ und $\tau_A = L/v_A = L/(B_{0y}/\sqrt{\mu_0 \rho})$ umgeschrieben werden:

$$\delta = L \left(\frac{\Delta' L \tau_A^2}{(kL)^2 \tau_R^2} \right)^{1/5} \quad (5.16)$$

Alternativ können wir nach der Anwachsrate auflösen:

$$\gamma = \tau_R^{-3/5} \tau_A^{-2/5} (\Delta' L)^{4/5} (kL)^{2/5} \quad (5.17)$$

Das Anwachsen geschieht also auf einer Hybridzeitskala, welche zwischen Alfvén- und resistiver Zeitskala liegt. Wir haben hier den Fall einer resistiven Instabilität untersucht, d.h. eine beliebig kleine äussere Kraft führt zur Ausbildung von Inseln; Rekonnektion kann aber auch in einem gegen die Tearing Mode stabilen System geschehen. Dann ist $\partial B/\partial t = 0$ und wir haben es mit einem stationären Strömungsmuster durch die resistive Schicht zu tun (sog. Sweet-Parker Rekonnektion). Hier erhält man ein etwas anderes Ergebnis, die Rekonnektionsrate liegt beim geometrischen Mittel aus Alfvén und resistiver Zeitskala.

Es bleibt aber zu bemerken, dass selbst diese Beschreibung oftmals noch zu unrealistisch langen Zeitskalen (bzw. unrealistisch dünnen Schichten) führt. Dann spielen andere Phänomene wie z.B. ein erniedrigter Widerstand durch Plasmaturbulenz oder Instabilitäten, welche die resistive Schicht aufweiten, eine Rolle. Rekonnektion ist daher noch immer ein aktueller Forschungsgegenstand in der Hochtemperatur-Plasmaphysik.

5.2 Rekonnektion mit Führungsfeld

Wir befassen uns jetzt mit der Rekonnektion in magnetisch eingeschlossenen Fusionsplasmen. Zunächst liegt hier eine andere Situation als in Fig. 5.1 vor, da es keine Bereiche gibt, in denen das Magnetfeld sein Vorzeichen wechselt: die poloidale Komponente $B_{0\theta}$, welche dem B_{0y} in Fig. 5.1 entspricht, wächst von der Achse zum Rand kontinuierlich an. Die Verscherung des Tokamakfeldes erzeugt aber trotzdem eine ähnliche Situation: Bewegt man sich längs einer Feldlinie auf einer resonanten Fläche mit Sicherheitsfaktor q_{res} , so entfernen sich beim Umlaufen um den Torus die benachbarten Feldlinien wegen des unterschiedlichen q -Wertes in poloidale Richtung. Hat man z.B. auf der $q = 2$ Fläche 2 Umläufe durchgeführt, so dass sich die Feldlinie gerade in sich schliesst, so hat eine benachbarte Feldlinie bei $r < r_{res}$ (d.h. $q = 2 - \epsilon$) den poloidalen Winkel, bei dem man den Umlauf gestartet hatte, bereits nach $2 - \epsilon$ toroidalen Umläufen erreicht und ist nach 2 Umläufen schon bei grösserem poloidalem Winkel. Für $r > r_{res}$ ist $q = 2 + \epsilon$ und die Feldlinie bleibt zurück. Es entsteht so relativ zur Feldlinie auf der $q=2$ Fläche eine poloidale Komponente, welche ihr Vorzeichen an der resonanten Fläche wechselt. Dieses auch als B^* bezeichnete Feld kann nun einer Tearing-Instabilität unterliegen. Hier haben wir es mit einem zweidimensionalen Problem zu tun, da die Instabilität längs des Führungsfelds konstante Phase hat. In dem im vorigen Abschnitt besprochenen Fall war das nicht notwendigerweise der Fall, obwohl wir zur Vereinfachung Symmetrie in z -Richtung angenommen hatten.

Da wir für die Tearing-Moden erwarten, daß sich die Störungen auf den resonanten Flußflächen mit konstanter Phase längs der Feldlinien ausbilden, bedeutet dies, daß ein kräftefreier Störstrom \vec{j}_1 längs \vec{B}_0 fließt. Der mit diesem Strom verbundene magnetische Fluß Ψ_1^* muß dann als Flußintegral des gestörten Magnetfeldes \vec{B}_1^* durch eine Referenzfläche längs des Gleichgewichtsmagnetfeldes an der resonanten Fläche definiert werden (sog. 'helikaler Fluß', siehe Abb. 5.2). Daher transformiert man im Screw-Pinch das Zylinderkoordinatensystem in ein he-

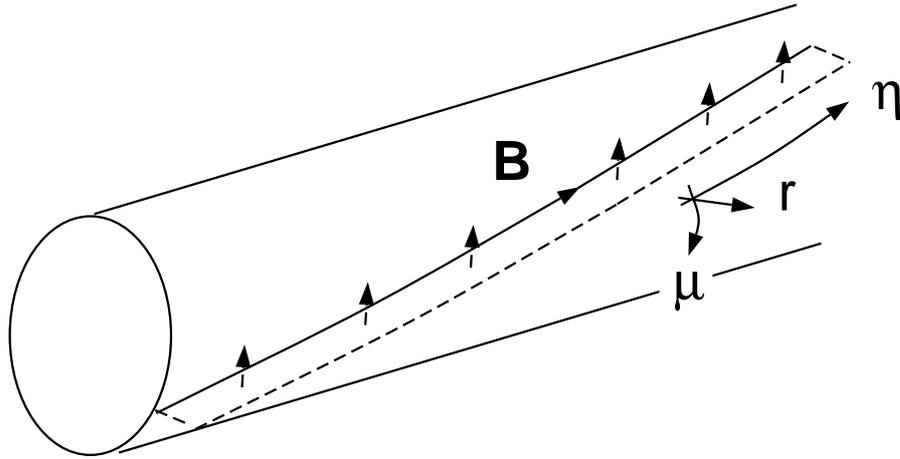


Abbildung 5.2: Definition des helikalen Koordinatensystems an einer resonanten Fläche; der helikale Fluß Ψ^* ergibt sich aus dem Integral von \vec{B} über die gestrichelte Fläche.

likales Koordinatensystem mit konstanter Steigung der Helix (d.h. verschwindendem Shear):

$$\hat{e}_r = \hat{e}_r \quad (5.18)$$

$$\hat{e}_\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{R_0} \frac{1}{q_{res}}\right)^2}} \left(\hat{e}_\theta - \frac{r}{R_0} \frac{1}{q_{res}} \hat{e}_z \right) \quad (5.19)$$

$$\hat{e}_\eta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{R_0} \frac{1}{q_{res}}\right)^2}} \left(\hat{e}_z + \frac{r}{R_0} \frac{1}{q_{res}} \hat{e}_\theta \right) \quad (5.20)$$

Die Steigung des helikalen Koordinatensystems ist also gleich der Feldliniensteigung an der resonanten Fläche; somit ist \hat{e}_η auf der resonanten Fläche genau parallel zum Gleichgewichtsmagnetfeld und \hat{e}_μ senkrecht dazu. In diesem Koordinatensystem verschwindet die μ -Komponente des Gleichgewichtsfelds an der resonanten Fläche

$$B_{0\mu}^* = \vec{B}_0 \cdot \hat{e}_\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{R_0} \frac{1}{q_{res}}\right)^2}} \left(B_{0\theta}(r) - B_{0\theta}(r_{res}) \frac{r}{r_{res}} \right) \approx B_{0\theta}(r) - B_{0\theta}(r_{res}) \frac{r}{r_{res}} \quad (5.21)$$

Für den helikalen Gleichgewichtsfluß Ψ_0^* gilt

$$\vec{B}_0^* = \nabla \Psi_0^* \times \hat{e}_\eta \approx \nabla \Psi_0^* \times \hat{e}_z \rightarrow \frac{d\Psi_0^*}{dr} = -B_{0\mu}^* \quad (5.22)$$

Man beachte, daß Ψ^* , analog zur Definition von Ψ in Kapitel 2 ein Fluß pro Einheitslänge (diesmal in helikaler Richtung) ist.

In den letzten beiden Gleichungen haben wir davon Gebrauch gemacht, daß das Gleichgewichtstoroidalfeld erheblich stärker als das Gleichgewichtspoloidalfeld ist. Somit zeigen \hat{e}_η und \hat{e}_z näherungsweise in die gleiche Richtung.

Aus (5.22) erhält man unter Verwendung von (5.21)

$$\left. \frac{d^2 \Psi_0^*}{dr^2} \right|_{r=r_{res}} = \left. \frac{dB_{0\mu}^*}{dr} \right|_{r=r_{res}} = B_{0\theta} \left. \frac{q'}{q} \right|_{r=r_{res}} \quad (5.23)$$

Wegen (5.22) gilt an der resonanten Fläche $d\Psi_0^*/dr = 0$ und Ψ_0^* läßt sich in der Nähe von r_{res} durch eine Parabel annähern. Für positive Verscherung ($q' > 0$) ist diese nach oben geöffnet (Gl. (5.23)). Das Gleichgewichtsfeld B_μ^* wechselt an der resonanten Fläche sein Vorzeichen; für $r < r_{res}$ ist es positiv, für $r > r_{res}$ negativ. Dies erhält man auch mit der Gleichung für B_μ^* : wir haben von $B_\theta(r)$ ein linear anwachsendes Feld subtrahiert, im Falle $q' > 0$ wächst aber $B_\theta(r)$ wegen $q \sim r/B_\theta(r)$ schwächer als linear. Die Gleichgewichtsgrößen Ψ_0^* und $B_{0\mu}^*$ sind in Fig. 5.3 dargestellt.

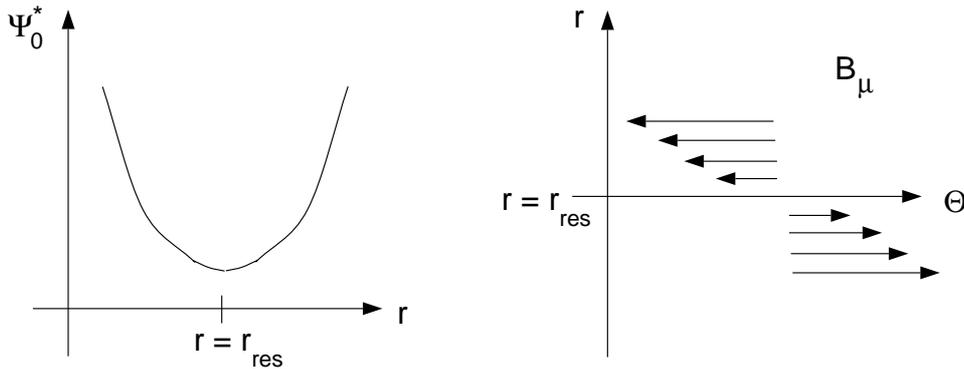


Abbildung 5.3: Die helikalen Gleichgewichtsgrößen Ψ_0^* und $B_{0\mu}^*$ als Funktion des Radius bzw. in der $r - \theta$ Ebene.

Wir wollen nun eine Gleichung für den gestörten helikalen Fluß Ψ_1^* aufstellen. Dazu zerlegen wir Ψ_1^* wiederum in Zylinderkoordinaten nach Fourierkomponenten

$$\Psi_1^* = \Psi_1^*(r) e^{i(m\theta - n\frac{z}{R_0})} \quad (5.24)$$

Wir berechnen jetzt Ψ_1^* außerhalb der resonanten Schicht, in welcher der Fluß durch den Störstrom erzeugt wird. In diesem Bereich ist nach obigen Ausführungen die ideale MHD gültig. Da die ideale Zeitskala viel kürzer als die resistive ist, bestimmt die Physik in der resistiven Schicht den Zeitverlauf und außerhalb durchläuft das Plasma eine Sequenz von idealen Gleichgewichten. Die Bedingung für eine ideale Verformung im Gleichgewicht ergibt sich aus dem Energiefunktional durch $\delta W = 0$. Wir können also wiederum die Euler-Lagrange

Gleichung aus dem Energiefunktional herleiten. Da wir stromgetriebene Moden untersuchen wollen, benutzen wir die niedrig- β Entwicklung Gl. (4.5) mit festem Rand, d.h. unter Vernachlässigung des Oberflächenterms. Variation ergibt analog zum Vorgehen bei der Herleitung des Suydam-Kriteriums (Gl. (4.11))

$$r(m^2 - 1) \left(\frac{n}{m} - \frac{1}{q} \right)^2 \xi - \frac{d}{dr} \left(r^3 \left(\frac{n}{m} - \frac{1}{q} \right)^2 \frac{d\xi}{dr} \right) = 0 \quad (5.25)$$

für die radiale Komponente des Verschiebungsvektors ($\xi = \xi_r$).

Die Beziehung zwischen ξ und Ψ_1^* erhalten wir aus (3.40) unter Verwendung der Fourierzerlegung der Störgrößen und mit $B_{1r} = im/r\Psi_1^*$

$$B_{1r} = \frac{B_{0\theta}}{r} \frac{\partial \xi_r}{\partial \theta} + B_{0z} \frac{\partial \xi_r}{\partial z} = \frac{i}{r} (m - nq) B_{0\theta} \xi_r \rightarrow \Psi_1^* = \left(1 - \frac{nq}{m}\right) B_{0\theta} \xi_r \quad (5.26)$$

Einsetzen in Gl. (5.25) ergibt nach einigen Umformungen

$$\Delta \Psi_1^* - \frac{\mu_0 (d j_{0z} / dr)}{B_{0\theta} (1 - q(r)n/m)} \Psi_1^* = 0 \quad (5.27)$$

Diese Gleichung ist als *Tearing Mode Gleichung* bekannt. Auch hier haben wir wieder $\hat{e}_\eta \approx \hat{e}_z$ verwendet.

Die Tearing Mode Gleichung beschreibt das Gleichgewicht des Plasmas unter Verformung durch den Störfluß Ψ_1^* . Die Besonderheit der resonanten Fläche wird durch die Singularität der Gleichung für $q_{res} = m/n$ deutlich. In Übereinstimmung mit unserer Interpretation der Tearing Mode als stromgetriebene Instabilität wird die Gleichung vom radialen Profil des Toroidalstroms bestimmt. Für gegebenes Gleichgewichtsstromprofil kann Ψ_1^* durch Integration von (5.27) mit geeigneten Randbedingungen bestimmt werden (z.B. $\Psi_1^*(0) = \Psi_1^*(r_{wall}) = 0$ wenn sich bei r_{wall} eine leitende Wand befindet).

Ein Beispiel für solch eine Lösung zeigt Fig. 5.4. Man sieht, daß es trotz der Singularität der Gleichung möglich ist, Ψ_1^* stetig zu wählen. Allerdings ergibt sich an der resonanten Fläche ein Knick in Ψ_1^* , d.h. $B_{1\mu}^*(r)$ springt an der resonanten Fläche. Daher hat $\Psi_1^{*'} = \mu_0 j_1$ eine Singularität, was einem Flächenstrom entspricht. Wir erhalten somit das Ergebnis, daß sich an der resonanten Fläche ein Flächenstrom ausbildet, welcher den Störfluß erzeugt. Dieser fließt längs der Feldlinien und wird somit, in Übereinstimmung mit den obigen Ausführungen, durch die ideale MHD nicht korrekt beschrieben.

Wir können aus der Form des Knicks ein heuristisches Stabilitätskriterium erhalten. Berücksichtigung der endlichen Leitfähigkeit führt zur Stromdiffusion; diese wird zu einer Abrundung von Ψ_1^* in der Nähe der resonanten Fläche führen (gestrichelte Linien im rechten Teil von Fig. 5.4). Dies führt, je nach Ausbildung des Knickes, zu einem Anwachsen oder Zerfallen der Störung. Fig. 5.4 entnimmt man, daß der entscheidende Parameter der Sprung von $\Psi_1^{*'}$ an der resonanten Fläche ist. Somit ist

$$\left(\frac{\Psi_1^{*'}}{\Psi_1^*} \right)_{r_{res} + \varepsilon} - \left(\frac{\Psi_1^{*'}}{\Psi_1^*} \right)_{r_{res} - \varepsilon} = \Delta' \quad (5.28)$$

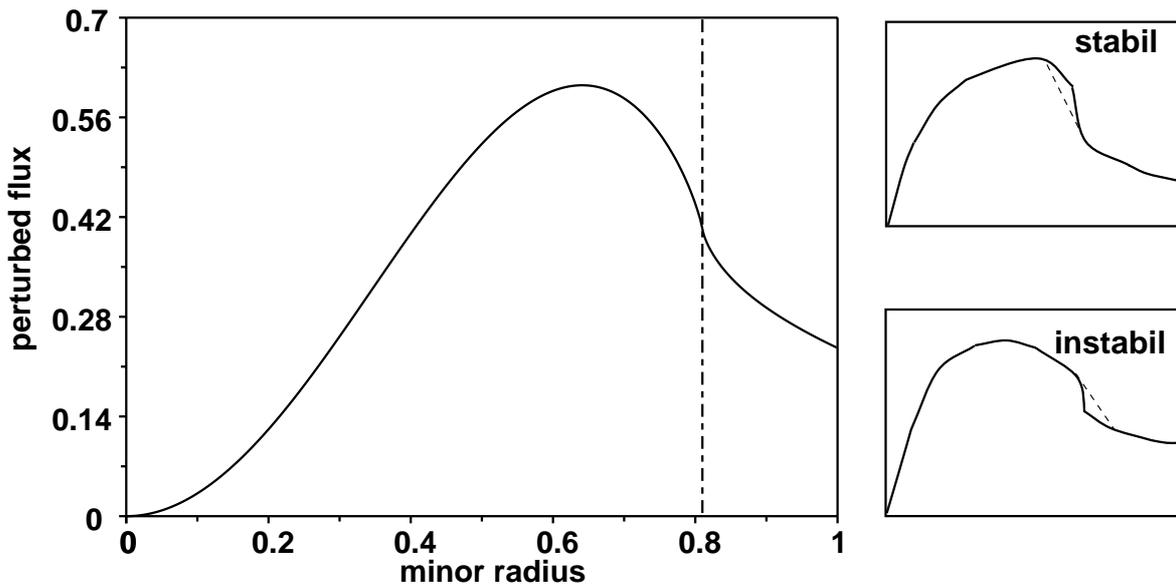


Abbildung 5.4: Die gestörte helikale Flußfunktion Ψ_1^* , mit der Tearing Mode Gleichung für das Stromprofil $j \sim (1 - (r/a)^2)^3$ berechnet. An der resonanten Fläche ergibt sich ein Knick, der über die Stabilität entscheidet.

der bestimmende Stabilitätsparameter. Unter Verwendung der Definition von Ψ^* weist man leicht nach, dass diese Definition von Δ' identisch mit der aus Glg. (5.14) ist. Analog zur dortigen Ableitung ergibt sich für $\Delta' > 0$ Instabilität, für $\Delta' < 0$ ist das System stabil. Eine genauere Untersuchung zeigt, daß Δ' mit dem Energiefluß (Poynting-Vektor) zwischen Außengebiet und resistiver Schicht verknüpft ist, somit fließt im instabilen Fall Energie in die resonante Fläche. In diesem Fall haben wir also die Stabilität der Tearing Mode mit Hilfe der idealen MHD berechnet. Die Berechnung der Anwachsrate liefert das aus dem vorhergehenden Abschnitt bekannte Resultat Glg. (5.17). Voraussetzung für die dortige Ableitung war jedoch, dass die Änderung der Flussflächen nur innerhalb der resistiven Schicht geschieht. Dieses Kriterium ist für Inselbreiten W , welche die Schichtdicke δ überschreiten, nicht mehr erfüllt und wir müssen in Glg. (5.14) δ durch W ersetzen, wobei W mit B_{1x} verknüpft ist. Es ergibt sich

$$\gamma W = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \Delta' \quad (5.29)$$

Bei grosser Inselbreite geschieht daher das Anwachsen auf der lokalen resistiven Zeitskala und die Beschleunigung des Plasmas in der Schicht ist nicht mehr wichtig. Dies ist in Fusionsplasmen praktisch immer der Fall, da δ i.A. sehr klein (z.B. von der Grössenordnung des Ionenlarmorradius) ist. Eine genauere Diskussion findet sich im nächsten Abschnitt.

5.3 Magnetische Inseln in Tokamaks

Wir betrachten nun die nichtlineare Entwicklung der Tearing Mode. Dazu untersuchen wir zunächst, wie sich die Topologie der Gleichgewichtsflußflächen Ψ_0^* durch Überlagerung mit dem Störfluß Ψ_1^* verändert. Wir machen die Annahme, daß der gestörte Fluß Ψ_1^* in radialer Richtung nicht über die Inselbreite variiert. Diese Näherung ist in der Literatur als 'constant Ψ approximation' bekannt und für Tearing Moden mit $m > 1$ hinreichend gut erfüllt (für $m = 1$ sind die Verhältnisse gänzlich anders und die Variation von Ψ_1^* in der Insel ist entscheidend für die Dynamik). Dann erhalten wir mit der Gleichung des helikalen Flusses (5.22) für den gesamten helikalen magnetischen Fluß

$$\Psi^* = \Psi_0^*(r_{res}) + \frac{1}{2}\Psi_0^{*''}(r - r_{res})^2 + \Psi_1^* \cos(m\theta - n\frac{z}{R_0}) \quad (5.30)$$

Hier haben wir davon Gebrauch gemacht, daß Ψ_0^* näherungsweise durch eine Parabel beschrieben werden kann, d.h. in der Taylorentwicklung verschwindet der lineare Term an der resonanten Fläche (siehe auch Fig. 5.3).

Die neuen Flußflächen ergeben sich als Konturen $\Psi^* = const$. Auflösen von Gl. (5.30) liefert:

$$r - r_{res} = \sqrt{\frac{2}{\Psi_0^{*''}}(\Psi^* - \Psi_0^*(r_{res}) - \Psi_1^* \cos(m\theta - n\frac{z}{R_0}))} \quad (5.31)$$

Diese Flächen sind in Fig. 5.5 in der $r - \theta$ -Ebene für $m = 2$ und verschiedene Werte von Ψ^* dargestellt.

Man erkennt, daß sich eine topologische Änderung ergibt: um die resonante Fläche herum bilden sich neue, geschlossene Flußflächen aus. Diese bilden einen vom übrigen Plasma getrennten Bereich aus. Sie werden daher als *magnetische Inseln* bezeichnet. Bei $\theta = 0$ befindet sich das Maximum von Ψ_1^* , d.h. hier fließt der Störstrom in die Richtung des Gleichgewichtsplasmastroms. An dieser Stelle befindet sich der X-Punkt der Insel. Im Minimum des Störstroms finden wir die maximale Ausdehnung der Insel, den sogenannten O-Punkt. Diese Verhältnisse gelten für den hier betrachteten Fall der nach oben geöffneten Parabel Ψ_0^* , d.h. nach Gl. (5.23) für positive Verscherung q' . Für negative Verscherung befindet sich der O-Punkt am Maximum des Störstroms, der X-Punkt am Minimum. Die maximale radiale Ausdehnung der geschlossenen Flußflächen der Insel wird als Inselbreite W bezeichnet.

Wir können eine einfache Beziehung für die Breite W der so entstandenen Inseln herleiten. Dazu betrachten wir die Gleichung der Inselseparatrix: am X-Punkt ist $\theta = 0$ und $r - r_{res} = 0$ und daher gilt

$$\Psi_{sep}^* = \Psi_0^*(r_{res}) + \Psi_1^* \quad (5.32)$$

Im O-Punkt ist $m\theta = \pi$. Die halbe Inselbreite ist gerade die radiale Position der Inselseparatrix am O-Punkt und somit gilt

$$\Psi_{sep}^* = \Psi_0^*(r_{res}) + \frac{1}{2}\Psi_0^{*''}\left(\frac{W}{2}\right)^2 - \Psi_1^* \quad (5.33)$$

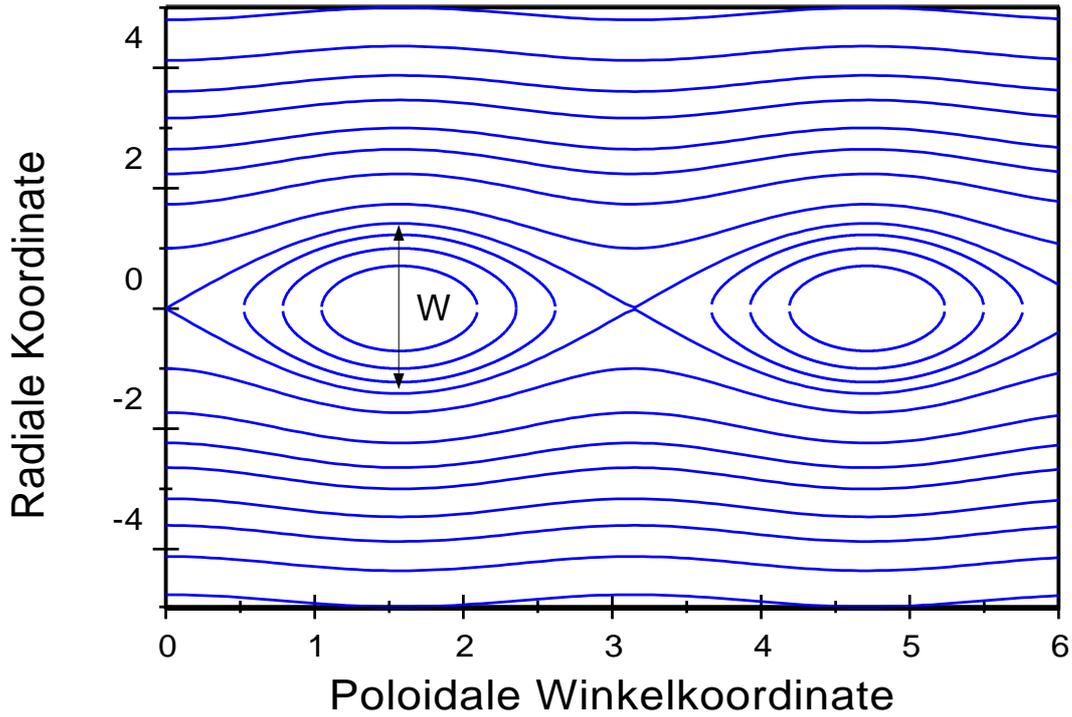


Abbildung 5.5: Die helikale Flußfunktion Ψ^* in der $r - \theta$ -Ebene für $m = 2$. Es bilden sich zwei magnetische Inseln der Breite W aus.

Gleichsetzen von (5.32) und (5.33) ergibt für die Inselbreite

$$W = 4 \sqrt{\frac{\Psi_1^*}{\Psi_0^{*''}}} \quad (5.34)$$

Die Inselbreite ist also proportional zum Störfluß und nach Glg. 5.23 umgekehrt proportional zur Verscherung des Gleichgewichtsfelds an der resonanten Fläche.

Mit den oben hergeleiteten Beziehungen kann nun die Gleichung für das nichtlineare Wachstum der Tearing Mode aufgestellt werden. Dazu betrachten wir die resistive Erzeugung des helikalen Störflusses Ψ_1^* . Die zeitliche Veränderung des Flusses ergibt gerade die Umfangsspannung in helikaler Richtung, d.h. in Richtung der Feldlinien auf der resonanten Fläche. Da Ψ^* der Fluß pro Einheitslänge in helikaler Richtung war, ergibt sich direkt das elektrische Feld in helikaler Richtung

$$\frac{\partial \Psi_1^*}{\partial t} = E_\eta = \frac{1}{\sigma} j_\eta - (\vec{v} \times \vec{B})_\eta \quad (5.35)$$

In der resistiven Schicht wollen wir wieder annehmen, dass der $\vec{v} \times \vec{B}$ -Term unbedeutend ist und Ψ_1^* ändert sich nur durch Ströme längs der Feldlinien. Wir können analog zu Glg. (5.13) eine Abschätzung für j_η bekommen, indem wir beachten, daß die Änderung des Magnetfelds über die resonante Fläche hinweg gerade gleich dem Strom in der Insel ist:

$$\begin{aligned}
\mu_0 j_\eta &= \frac{1}{W} (B_{1\mu}^*(r_{res} - W/2) - B_{1\mu}^*(r_{res} + W/2)) \\
&= \frac{1}{W} (\Psi_1^{*'}(r_{res} + W/2) - \Psi_1^{*'}(r_{res} - W/2)) = \frac{\Psi_1^*(r_{res})}{W} \Delta'(W)
\end{aligned} \tag{5.36}$$

wobei wir $\Delta'(W)$ analog zur Definition von Δ' im linearen Fall nach Gl. (5.28), diesmal aber für endliche Inselbreite, eingeführt haben. Damit ergibt sich aus Gl (5.35)

$$\frac{\partial \Psi_1^*}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \frac{\Psi_1^*}{W} \Delta'(W) \tag{5.37}$$

Schließlich kann mit Gl. (5.34) Ψ_1^* durch W ausgedrückt werden und wir erhalten mit der Definition der resistiven Zeitskala nach Gl. (5.3) an der resonanten Fläche

$$\frac{\tau_R}{r_{res}} \frac{dW}{dt} = r_{res} \Delta'(W) \tag{5.38}$$

Man beachte, dass diese Gleichung äquivalent zu Glg. (5.29) ist. Eine genaue Berechnung von j_η unter Berücksichtigung der vollen Geometrie der Insel ergibt einen anderen Zahlenfaktor:

$$\frac{\tau_R}{r_{res}} \frac{dW}{dt} = 1.22 r_{res} \Delta'(W) \tag{5.39}$$

Diese Gleichung ist als Rutherfordgleichung bekannt. Das nichtlineare Stabilitätskriterium ergibt sich hieraus durch Betrachten der zeitlichen Änderung von W : Für positives dW/dt wächst die Insel an, daher ist

$$\Delta'(W) < 0 \tag{5.40}$$

das nichtlineare Kriterium für Stabilität gegen Tearing Moden.

Allgemein stehen auf der rechten Seite der Rutherfordgleichung alle Beiträge zum helikalen Störstrom, über die Insel gemittelt. Diese können auch noch anderer Natur sein, z.B. durch Abflachung von Druckgradienten über die Insel (Neoklassische Tearing Mode, NTM) oder durch extern getriebene helikale Ströme. Dann treten auf der rechten Seite weitere Terme hinzu.

Das Anwachsen der Insel im instabilen Fall wird durch die Abhängigkeit $\Delta'(W)$ bestimmt. Eine Sättigung des Inselwachstums und somit eine stationäre Insel kann nur auftreten, wenn durch das Anwachsen der Insel $\Delta'(W)$ kleiner wird und schließlich verschwindet. Dies kann z.B. durch eine lokale Abflachung des Gradienten der Gleichgewichtsstromdichte durch die Insel geschehen. Oft findet man dann eine Situation, die näherungsweise durch

$$\Delta'(W) = \Delta'(0) \left(1 - \frac{W}{W_{sat}}\right) \tag{5.41}$$

ausgedrückt werden kann. Es ergibt sich Anwachsen bis zur gesättigten Inselbreite W_{sat} nach dem Gesetz

$$W(t) = W_{sat} \left[1 - \exp \left(-t \frac{r_{res}^2 \Delta'(0)}{\tau_R W_{sat}} \right) \right] \quad (5.42)$$

Die typische Zeitkonstante ist also $\tau_R W_{sat} / (r_{res}^2 \Delta'(0))$, d.h. von der Größenordnung der resistiven Zeitskala und umgekehrt proportional zu $\Delta'(0)$. Im stationären Fall ist $\Delta'(W_{sat}) = 0$, d.h. es fließt kein Flächenstrom mehr. Die Inselstruktur verhält sich dann in gewisser Weise wie ein 'Stellarator im Tokamak'. Im folgenden wollen wir uns nun mit den Auswirkungen magnetischer Inseln auf Tokamakentladungen beschäftigen.

5.4 Experimentelle Beispiele

Die Hauptbedeutung magnetischer Inseln in Fusionsplasmen liegt darin, daß sie unterschiedliche radiale Bereiche längs Feldlinien miteinander verbinden und so zu einem Kurzschluß der radialen Wärmeisolation führen. Daher erscheinen magnetische Inseln als flache Bereiche im Druckprofil und reduzieren die in einer Entladung gespeicherte Energie. Im topologischen Sonderfall der (1,1) Mode kann Rekonnektion auch zu einem sehr schnellen Auswurf des zentralen Plasmas führen. Wenn mehrere Inseln unterschiedlicher Helizität auftreten, kann dies durch nichtlineare Kopplung zum Verlust der Wärmeisolation über große Teile des Radius und somit, über die stark verringerte Leitfähigkeit, zum Verlust der Entladung führen. Diese Phänomene sollen im folgenden beschrieben werden.

5.4.1 Sägezähne

Wir hatten in Kap. 4 bereits die ideale interne Kinkinstabilität mit den Modenzahlen (1,1) kennengelernt. Unter Einbeziehung der endlichen Leitfähigkeit des Plasmas ergibt sich hier ein neues Bild: bei der radialen Verschiebung des heißen Plasmakerns entsteht ein Strom auf der $q = 1$ Fläche, der die Flußerhaltung der idealen MHD gewährleistet. Dieser zerfällt jedoch auf der resistiven Zeitskala. Nach obigen Ausführungen bedingt dies das Wachstum einer magnetischen Insel. Auf Grund der besonderen Topologie der (1,1) Mode kann die Insel nun als kalter Bereich in das heiße Zentrum hineinwachsen, während das heiße Plasma aus dem Zentrum ausgeworfen wird. Die Verhältnisse sind in Fig. 5.6 dargestellt.

Eine detaillierte theoretische Betrachtung ergibt, daß dieser Prozeß sehr schnell ablaufen kann, da neben den resistiven Effekten auch die Trägheit eine Rolle spielt; die Anwachsrate ist daher ein Hybrid aus resistiver und Alfvénzeitskala.

Im Experiment äußert sich diese Instabilität als plötzlicher Zusammenbruch der zentralen Dichte und Temperatur. Dieser geschieht selbst in heißen Plasmen oft auf Zeitskalen ≤ 1 ms. Mit der Rekonnektion der $q = 1$ Fläche wird auch der Grund für die ideale Kink-Instabilität beseitigt: Aus Fig. 5.6 wird deutlich, daß die ehemalige $q = 1$ Fläche jetzt das Zentrum des Plasmas geworden ist ($B_{0\mu}^*$ zeigt überall in die gleiche Richtung), daher gilt überall $q \geq 1$. Das Plasma ist nun solange stabil, bis sich durch das Zuspitzen des Stromprofils im Zentrum wiederum eine Situation mit $q(0) < 1$ einstellt. Dieses Zuspitzen hat seine Ursache darin, daß im

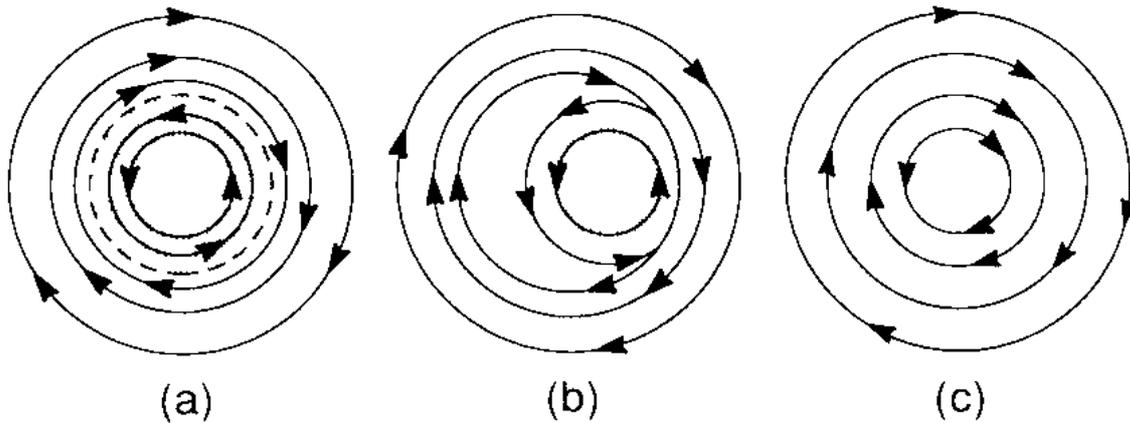


Abbildung 5.6: Entwicklung des $(1,1)$ internen Kinks mit endlicher Leitfähigkeit: es bildet sich eine $m = 1$ Inselstruktur, die den heißen Kern nach außen verdrängt. Gezeigt ist $B_{0\mu}^*$; das helikale Feld wechselt an der resonanten Fläche sein Vorzeichen.

Zentrum T_e und damit auch σ maximal ist. Es geschieht auf der resistiven Zeitskala innerhalb der $q = 1$ Fläche, die im Bereich einiger 10 ms bis zu einigen 100 ms liegt. Daher sieht man im Experiment ein langsames Ansteigen der Zentraltemperatur $T_e(0)$, bis der resistive interne Kink instabil wird und der schnelle Auswurf von Fluß und Plasma aus dem Zentrum erfolgt. Dieser äußert sich in einem raschen Abfall von $T_e(0)$. Auf Grund der charakteristischen Signalform hat man der Instabilität den Namen 'Sägezahninstabilität' gegeben. Ein Beispiel ist in Fig. 5.7 gezeigt.

Außerhalb der $q = 1$ Fläche ist der Verlauf von T_e invertiert: hier führt der beim Sägezahnabbruch auftretende nach außen laufende Wärmepuls zu einer transienten Erhöhung von T_e .

Die Sägezahninstabilität wird in den meisten Tokamakentladungen beobachtet, sie begrenzt den Wert des Sicherheitsfaktors im Zentrum auf Werte nahe eins und stabilisiert damit das Stromprofil. Weiterhin zeigt sich, daß diese Instabilität zu einer effektiven Kontrolle des zentralen Teilcheninhalts führt. Daher ist die Sägezahninstabilität im Experiment nicht unerwünscht, es wird für künftige Tokamakexperimente aber eine Kontrolle des Sägezahnverhaltens (Repetitionsfrequenz, Amplitude des Abbruchs) angestrebt.

5.4.2 Stromabbrüche (Disruptionen)

Eine weitere in Tokamaks beobachtete Instabilität ist die sogenannte Stromabbruchinstabilität (Disruption). Diese tritt häufig in Entladungen auf, in denen die Plasmadichte kontinuierlich gestigert wird. Die Phänomenologie einer solchen Disruption ist in Fig. 5.8 dargestellt:

Man erkennt das kontinuierliche Ansteigen der Dichte, hervorgerufen durch stetiges Gasblasen. Zusammen mit der Dichte steigt auch die vom Plasma abgestrahlte Leistung an. Bei $t = 2.65$ s beobachtet man plötzlich das Anwachsen einer Störung des Magnetfelds (Signal 'MHD mode activity', dargestellt ist \dot{B}_θ , gemessen mit einer Spule an der Innenwand des Vaku-

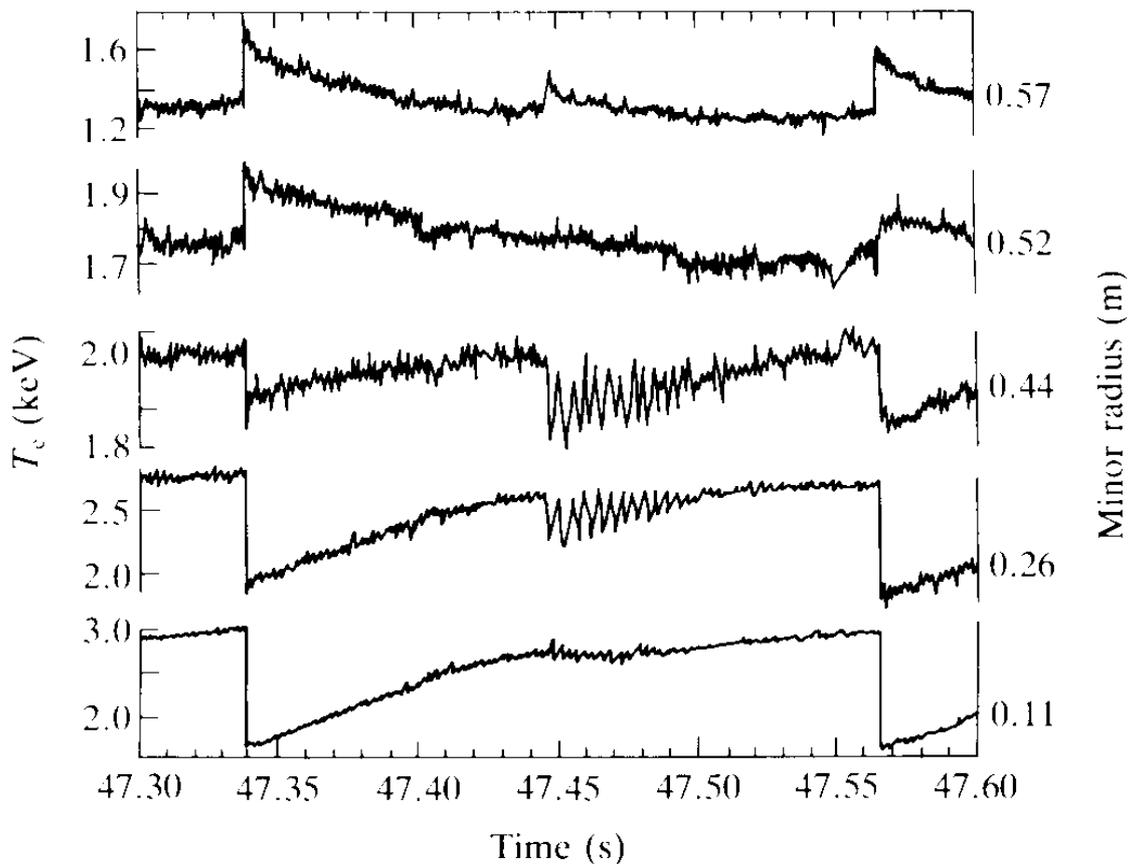


Abbildung 5.7: Zeitliche Entwicklung der Plasmatemperatur bei der Sägezahninstabilität innerhalb (untere Spuren) und außerhalb (obere Spuren) der $q = 1$ Fläche.

umgefäßes. Eine genauere Analyse ergibt meistens, daß die (2,1) Tearing Mode eine dominante Rolle bei der Disruption spielt. Bei Erreichen einer kritischen Amplitude der Störung verliert plötzlich das Plasma seine radiale Wärmeisolation und es erfolgt ein Auswurf eines Großteils der gespeicherten Energie. Dies äußert sich im schnellen Abfall der Dichte bei $t = 2.7$ s. Diese Phase spielt sich sehr schnell, d.h. auf einer Zeitskala von einigen $100 \mu\text{s}$ ab (sog. 'Energy Quench'), sodaß Details in Fig. 5.8 nicht zu erkennen sind. Das verbleibende Plasma hat auf Grund seiner niedrigen Temperatur einen stark erhöhten Widerstand: fällt die Temperatur z.B. von $T_e = 1$ keV auf $T_e = 10$ eV ab, so erhöht sich der Widerstand um den Faktor $T_e^{3/2} = 1000$. Dies bedeutet in der Praxis, daß der Plasmastrom vom Transformator nicht mehr aufrecht erhalten werden kann und der Strom zerfällt auf der resistiven Zeitskala (sog. 'Current Quench'). Wegen der geringen Temperatur beträgt diese jetzt nur noch $\tau_R = 10$ ms an Stelle der oben angegebenen 10 s für $T_e = 1$ keV. Im Experiment findet man oft zwei Phasen des Energy Quench. Nicht jeder Energy Quench zieht einen Current Quench nach sich; wenn der Energy Quench das Plasma nicht auf zu niedrige Temperaturen abkühlt, kann der Transformator den Plasmastrom näherungsweise konstant halten und durch die erhöhte Ohm'sche Heizleistung

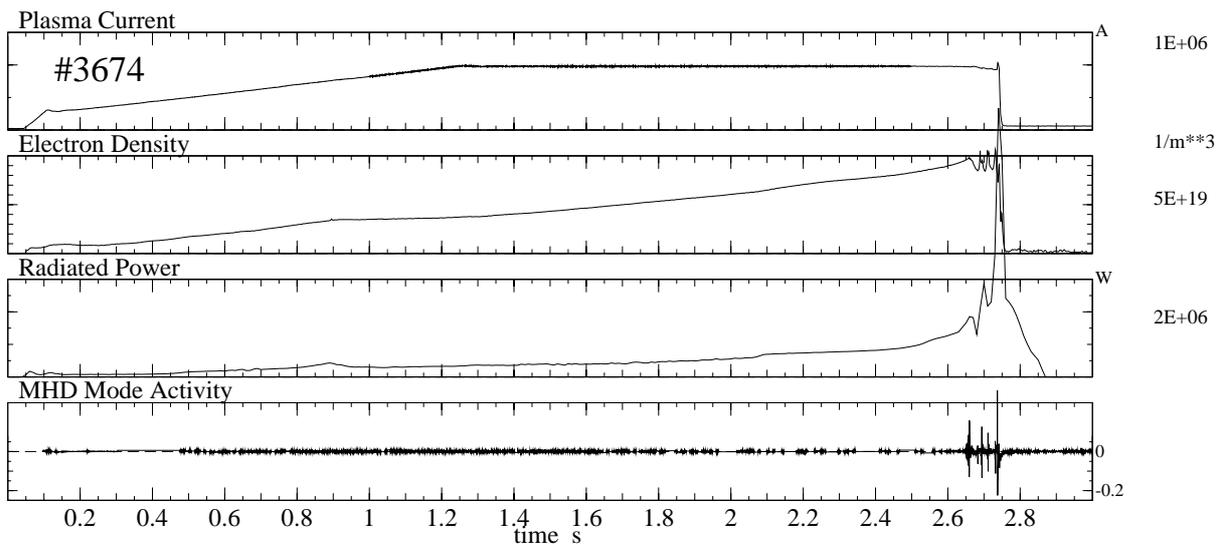


Abbildung 5.8: *Stromabbruchinstabilität (Disruption) im Tokamak.*

den Energieverlust ausgleichen (sog. 'Minor Disruption').

Wir wollen nun den physikalischen Mechanismus der Disruption untersuchen. Bei der oben beschriebenen Entladung wird auf Grund der Zufuhr des Wasserstoffgases durch Ventile im Vakuumgefäß der Randbereich des Plasmas überproportional abgekühlt, was zu einer Zuspitzung des Stromprofils führt. Nach Glg. (5.27) treibt der Stromgradient an der $q = 2$ -Fläche dann die (2,1) Tearing Mode. Der plötzliche Verlust der Wärmeisolation beim Energy Quench läßt sich jedoch nicht durch die (2,1) Mode allein erklären. Hier besteht zur Zeit die Auffassung, daß dies durch Kopplung mit anderen Tearing Moden geschieht, was zu einer plötzlichen Stochastisierung des Magnetfelds und dadurch zum Verlust der Wärmeisolation führen kann. Das Auftreten der (2,1) Mode begrenzt somit die maximal erreichbare Plasmadichte (sog. Dichtelimit).

Ein experimentelles Beispiel dazu ist in Fig. 5.9 gezeigt. Man erkennt, daß mindesten zwei Inseln im Temperaturprofil vorhanden sind, d.h. neben der (2,1) Mode tritt auch eine (3,1) Mode auf. Zum Zeitpunkt A verliert das Plasma seine Wärmeisolation an der $q = 2$ -Fläche. Es breitet sich eine Wärmewelle nach außen aus, die kurzzeitig an der $q = 3$ -Fläche aufgestaut wird, bevor auch hier die Wärmeisolation verloren geht und der Energiepuls zum Plasmarand durchbricht.

Obwohl dieses einfache Bild die Grundzüge der Disruption zutreffend beschreibt, sind die Einzelheiten des Prozesses, wie z.B. der Einsatz der Stochastisierung, noch immer Gegenstand aktueller Forschung. Disruptionen stellen in großen Tokamaks eine ernsthafte Gefahr für die Maschine dar: einerseits wird die gesamte im Plasma gespeicherte kinetische Energie in wenigen $100 \mu\text{s}$ auf der umgebenden Wand deponiert, andererseits wird auch die im Plasma gespeicherte magnetische Energie des Poloidalfelds frei. Diese wird z.T. in Wärme dissipiert, z.T. kann sie aber auch über Induktion auf das Vakuumgefäß übertragen werden. Die dadurch entstehenden Ströme können im Zusammenwirken mit den externen Magnetfeldern zu beacht-

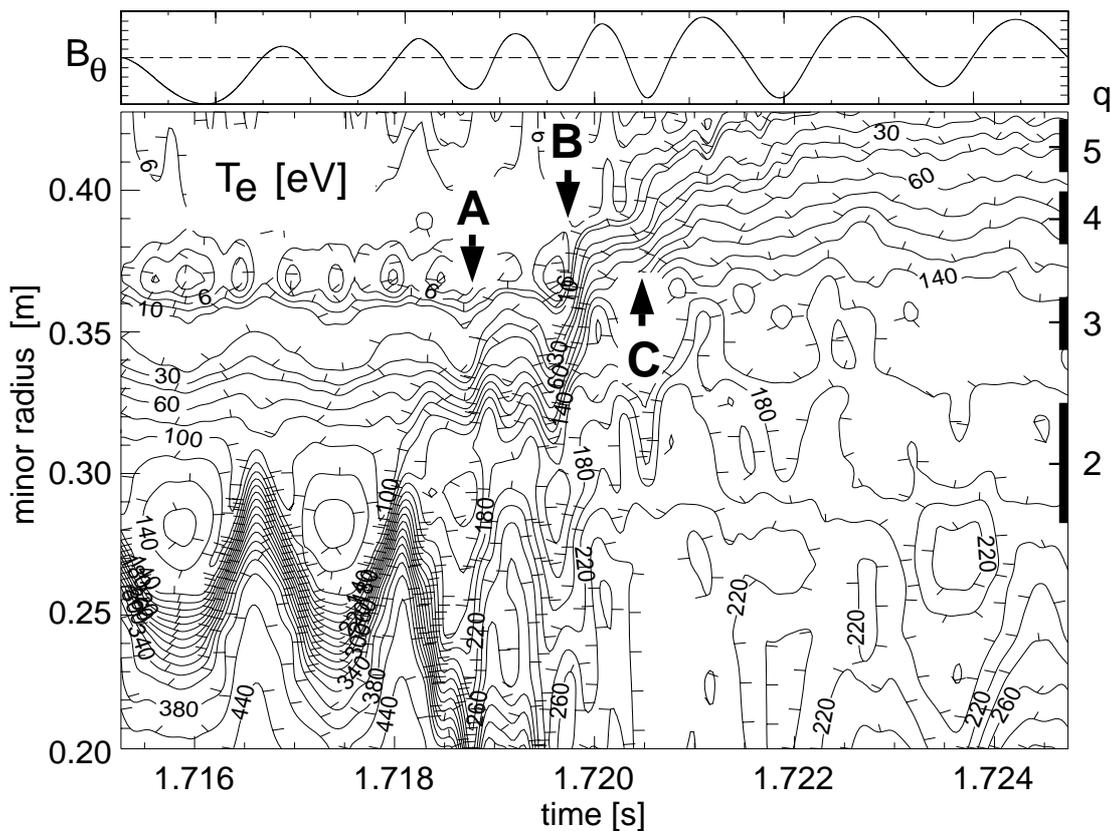


Abbildung 5.9: Zeitliche Entwicklung magnetischer Inseln beim Energy Quench. Gezeigt sind Konturen von T_e .

lichen Kräften auf die mechanische Struktur des Tokamaks führen. Dies gilt vor allem für im Querschnitt elongierte Tokamakplasmen, bei denen häufig auch die Kontrolle der (instabilen) Plasmalage verloren geht, was zu zusätzlichen Gefäßströmen auf Grund der vertikalen Bewegung führt. Daher ist die Vermeidung oder auch Milderung von Disruptionen ein aktuelles Thema der Tokamakphysik.

5.4.3 Resistives β -Limit

Bisher haben wir die Tearing Mode als stromgetriebene Instabilität betrachtet. Es gibt jedoch einen Effekt, der dazu führt, daß im Tokamak auch druckgetriebene Tearing Moden auftreten. Dies liegt daran, daß ein Druckgradient im toroidalen Plasma zu einem toroidalen Strom führt. Die neoklassische Transporttheorie zeigt, daß dieser sogenannte 'Bootstrap-Strom' durch den mit dem Druckgradienten verbundenen Gradienten in der Anzahl der im toroidalen Spiegel des Magnetfelds gefangenen Teilchen erzeugt wird. Er ist daher proportional zu ∇p . Nimmt man an, daß man eine Insel an einer rationalen Fläche mit hohem Druckgradienten erzeugt, so wird sich im Inneren der Insel ∇p abflachen und somit der Bootstrap-Strom sinken. Man erzeugt so

einen helikalen Defektstrom im O-Punkt der Insel. Nach den oben angeführten Überlegungen bedeutet dies, daß, positive Verscherung des Magnetfelds vorausgesetzt, die Insel vergrößert wird. Dies führt wiederum zu einer weiteren Abflachung des Druckgradienten in der Insel und damit zu weiterem Anwachsen der Insel. Das Plasma ist also instabil gegen eine Tearing Instabilität, sobald eine Insel vorhanden ist, die zur ersten Abflachung führt (sog. 'Seed Island'). Diese kann z.B. durch eine Mode auf einer benachbarten Fläche induziert werden, etwa beim Sägezahnabbruch. Auf Grund der entscheidenden Rolle des Bootstrap-Stroms wird diese Instabilität die *neoklassische Tearing Mode* genannt.

Das Auftreten neoklassischer Tearing Moden limitiert wegen der Abhängigkeit vom Druckgradienten häufig den maximal möglichen Plasmadruck. Dieses resistive β -Limit tritt i.A. bei niedrigeren Werten auf, als diese vom Troyon-Limit der idealen MHD vorhergesagt werden und ist daher in der Praxis eine wichtige Operationsgrenze für Tokamaks. Ein Beispiel für das resistive β -Limit durch neoklassische Tearing Moden ist in Fig. 5.10 gezeigt. Hier tritt eine gekoppelte Struktur aus (3,2) und (2,2) Mode auf, die bei $t = 2.1$ s zum Absinken des des Energieinhaltes führt.

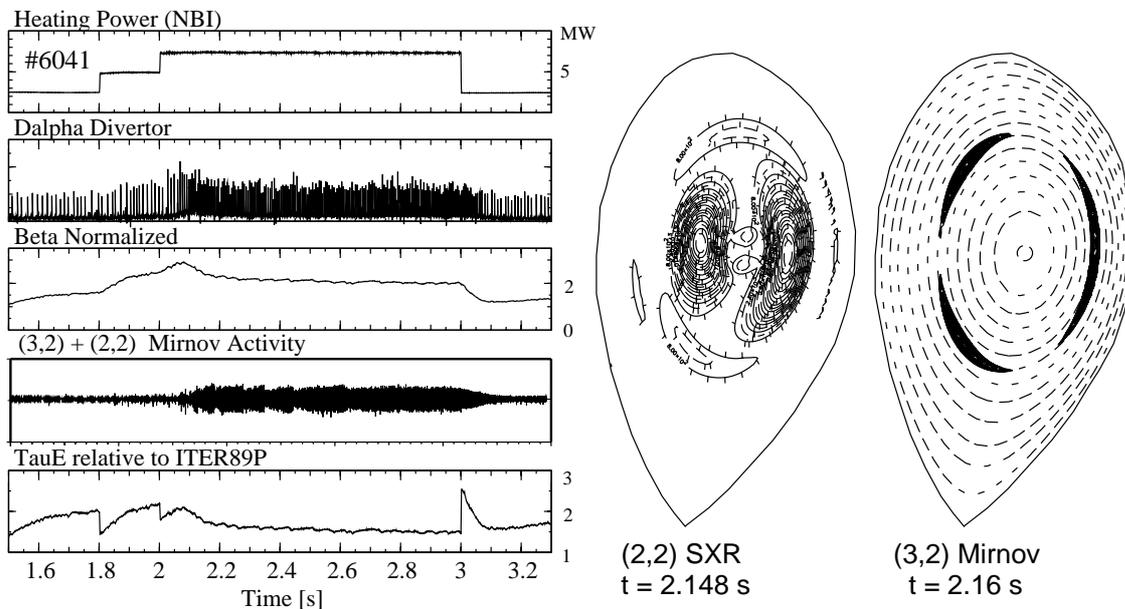


Abbildung 5.10: Resistives β -Limit: Trotz Erhöhen der Heizleistung läßt sich der Energieinhalt des Plasmas nicht mehr steigern (links). Verantwortlich ist eine gekoppelte Struktur von (3,2) und (2,2) Inseln (rechts).

Eine Abhilfe gegen das Auftreten der neoklassischen Tearing Moden stellt das lokale Treiben von Strom in der Insel, z.B. durch Einstrahlen von Mikrowellen bei der Elektron-Zyklotronresonanz dar. Dieser extern getriebenen Strom kann den Verlust des Bootstrap-Stroms kompensieren und so die neoklassische Insel unterdrücken.

Neoklassische Moden können im Prinzip durch Betrieb mit negativer Verscherung vermieden werden, da dann die Absenkung des Bootstrap-Stromes in der Insel die Inselgröße verkleinert

und somit sogar stabilisierend wirkt. Ein solches q -Profile kann prinzipiell durch ein Stromprofil, welches sein Maximum nicht im Zentrum hat, erreicht werden. Allerdings ist es auf Grund natürlichen Tendenz zur Zuspitzung der Stromprofile im Tokamak, die ihren Grund in der maximalen Leitfähigkeit im Zentrum hat, schwierig, solche Stromprofile aufrecht zu erhalten. Solche Untersuchungen (sog. 'Advanced Tokamaks') werden zur Zeit erst begonnen; die weitere Entwicklung muß zeigen, ob dies ein gangbarer Weg ist.

Kapitel 6

Literaturverzeichnis

Allgemeine Plasmaphysik:

- F. F. Chen - Introduction to Plasmaphysics - Plenum Press New York - 1984
A.R. Choudhuri - The Physics of Fluids and Plasmas - Cambridge University Press - 1998
R. Kippenhahn, C. Millenhoff - Elementare Plasmaphysik - BI Wissenschaftsverlag - 1975
N.A. Krall, A.W. Trivelpiece - Principles of Plasma Physics - San Francisco Press - 1986

Fusionsorientierte Plasmaphysik:

- R. Goldston, P. Rutherford - Plasmaphysik - Vieweg Verlag - 1998
M. Kaufmann - Plasmaphysik und Fusionsforschung - Teubner - 2003
U. Schumacher - Fusionsforschung - Wissenschaftliche Buchgesellschaft - 1993
W.M. Stacey - Fusion Plasma Analysis - Wiley and Sons - 1981

(Plasma)-Astrophysik:

- B.W. Carroll, D.A. Ostlie - Modern Astrophysics - Addison-Wesley - 1996
M.S. Longair - High Energy Astrophysics - Cambridge University Press - 1981
A.L. Perratt - Physics of the Plasma Universe - Springer - 1992

Spezielle Bücher über MHD:

- G. Bateman - MHD Instabilities - The MIT Press Cambridge Massachusetts - 1978
D. Biskamp - Nonlinear MHD - Cambridge University Press - 1993
J. Freidberg - Ideal Magnetohydrodynamics - Plenum Press - New York and London - 1987
E.R. Priest - Solar Magnetohydrodynamics - D.Reidel - 1982