

Plasmaphysik

Hartmut Zohm

*Vorlesung an der
LMU München*

Wintersemester 2012/13

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	5
1.1 Erzeugung von Plasmen: Ein einfaches Experiment	5
1.2 Vorläufige Definition und Eigenschaften	8
1.3 Vorkommen	8
1.3.1 Astrophysikalische Plasmen	9
1.3.2 Laborplasmen	11
2 Plasmacharakteristika	15
2.1 Zustandsgrenzen	15
2.1.1 Ideale Plasmen	15
2.1.2 Ionisationsgrenze	16
2.1.3 Relativistische Grenze	17
2.1.4 Entartung	17
2.1.5 Relativistische Entartung	18
2.2 Quasineutralität	20
2.2.1 Die Plasmanäherung	21
2.2.2 Debye-Abschirmung	21
2.2.3 Die Plasmafrequenz	24
2.3 Plasmapotential	26
2.3.1 Plasma-Wand Grenzschichten	26
2.3.2 Die Langmuirsonde	28
3 Stoßprozesse	31
3.1 Elastische und inelastische Stöße	31
3.2 Reibungskraft durch Coulombstöße	32
3.3 Stoßzeiten und freie Weglängen	35
3.4 Leitfähigkeit von Plasmen	37
3.4.1 Elektrische Leitfähigkeit	39
3.4.2 Wärmeleitung	41

4	Thermodynamisches Gleichgewicht	43
4.1	Elementarprozesse und Ratengleichungen	43
4.2	Vollständiges Gleichgewicht	45
4.3	Lokales thermisches Gleichgewicht	47
4.4	Koronagleichgewicht	50
5	Teilchenbewegung im Magnetfeld	53
5.1	Bewegung im konstanten Magnetfeld	53
5.2	Teilchendriften: 'Der Guiding Centre' Ansatz	55
5.3	Adiabatische Invarianten	65
6	Vielteilchenbeschreibung	69
6.1	Kinetische Theorie	69
6.2	Momentenbildung: Die MHD Gleichungen	74
6.2.1	Einfache MHD Gleichgewichte	77
6.2.2	Der 'eingefrorene Fluß'	80
7	Wellen im Plasma	83
7.1	Die linearisierten Wellengleichungen	83
7.2	Wellen ohne äußeres Magnetfeld	86
7.2.1	Transversalwellen	87
7.2.2	Longitudinalwellen	88
7.3	Wellen mit äußerem Magnetfeld	90
7.3.1	Ausbreitung parallel zum Magnetfeld	90
7.3.2	Ausbreitung senkrecht zum Magnetfeld	93
8	Literaturverzeichnis	97

Kapitel 1

Grundlagen

In diesem Teil der Vorlesung wird eine Einführung in die Grundlagen der Plasmaphysik gegeben. Dabei werden generelle Eigenschaften von Plasmen unterschiedlichster Herkunft gegeben. Die Anwendung dieser Grundlagen auf Plasmen aus dem Bereich der Fusionsforschung bleibt dem zweiten Teil der Vorlesung vorbehalten.

1.1 Erzeugung von Plasmen: Ein einfaches Experiment

Eines der einfachsten Experimente zur Erzeugung eines Plasmas im Labor ist die Gasentladung. Den prinzipiellen Aufbau eines solchen Experimentes zeigt Fig. 1.1: Eine Vakuumröhre (z.B. Glaszylinder) wird evakuiert. Dabei liegt zwischen den Enden der Röhre eine Spannung U im Bereich einiger 100 V an. Mit Absinken des Gasdruckes beobachtet man plötzlich eine Leuchterscheinung; gleichzeitig fließt in der Röhre ein Strom; das Gas ist leitfähig geworden. Es bildet sich eine *Gasentladung* aus.

Wir wollen das Zustandekommen der Gasentladung näher untersuchen: Offensichtlich entstehen im unter Normaldruck elektrisch neutralen Gas unterhalb eines bestimmten Druckes freie Ladungsträger, die den Strom in der Röhre tragen. Das neutrale Gas ist, zumindest teilweise, in den *Plasmazustand* übergegangen, d.h. Elektronen und Ionen liegen getrennt vor und tragen so den Strom der Entladung.

Wir gehen zunächst davon aus, daß im neutralen Gas spontan (z.B. durch Soft-X-Quanten der Hintergrundstrahlung) ein einzelnes Atom in Ion und Elektron aufgespalten wird. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß dieser Prozeß an der Kathode stattfindet. Die Stärke des zwischen Anode und Kathode meßbaren Stromes hängt dann davon ab, wieviele weitere Ladungsträger das Elektron auf dem Weg von der Kathode zur Anode erzeugt. Sei α die Wahrscheinlichkeit pro Längeneinheit, daß ein Elektron durch die im Feld gewonnene kinetische Energie beim Stoß mit einem neutralen Atom zur Ionisation desselben führt (in der Literatur wird α als *erster Townsendkoeffizient* bezeichnet, der *zweite Townsendkoeffizient*, der die Ionisation durch Stoß eines Ions mit einem Neutralen beschreibt, ist normalerweise zu vernachlässigen). Dann erhalten wir eine Differentialgleichung für die Zahl N der entstandenen Elektronen

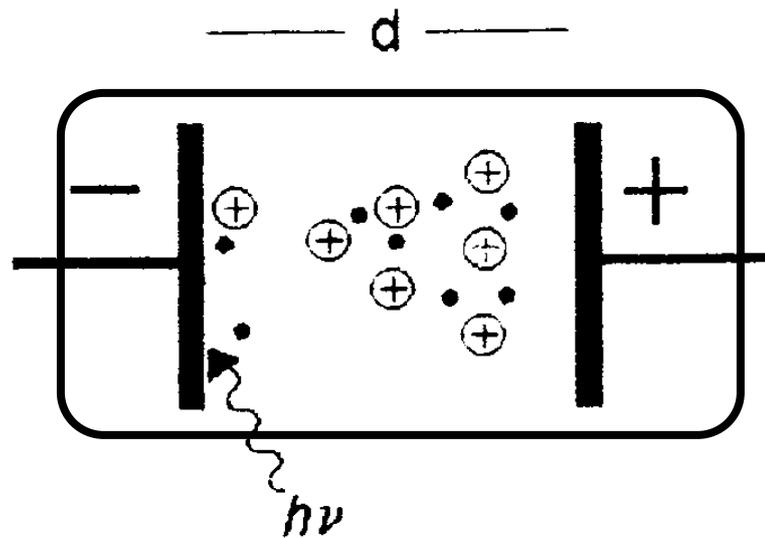


Abbildung 1.1: Schema einer Gasentladungsröhre

$$\frac{dN}{dx} = \alpha N \rightarrow N(d) = N_0 e^{\alpha d}, \quad (1.1)$$

wobei N_0 die Anzahl der extern erzeugten Elektronen und d die Länge der Entladungsröhre ist. Für $\alpha d \gg 1$ ist $N \gg N_0$, d.h. ein einzelnes extern erzeugtes Elektron erzeugt einen Strompuls von vielen Elementarladungen pro Zeiteinheit (*Ladungsträgerlawine*). Dieser Effekt wird in *Gaszählrohren* zum Nachweis ionisierender Strahlung verwendet.

Offensichtlich tritt unterhalb eines gewissen Gasdrucks eine stationäre Entladung ein; es werden kontinuierlich weitere Elektronen erzeugt. Dies geschieht zunächst durch den Stoß der erzeugten Ionen mit dem Kathodenmaterial. Die Zahl der erzeugten Elektronen pro Ion ist durch γ , den *dritten Townsendkoeffizient* (Materialkonstante), gegeben. Typische Werte sind $\gamma = 0.01 - 0.1$. Eine selbständige Entladung tritt ein, wenn ein Elektron auf dem Weg zur Anode mindestens ein weiteres Elektron (über den Stoß der erzeugten Ionen mit der Kathode) erzeugt. Die *Zündbedingung* lautet somit

$$\gamma(e^{\alpha d} - 1) \geq 1 \quad (1.2)$$

(man beachte dass das an der Kathode erzeugte erste Ion keine Energie im Feld aufnimmt und deshalb kein Elektron auslöst). Diese Bedingung läßt sich in eine Bedingung an den Gasdruck und die Länge der Entladungsröhre umformulieren. Wir benötigen dazu die Parameterabhängigkeit von α : Die Zahl der ionisierenden Stöße ist proportional zur Dichte n und damit (bei näherungsweise konstanter Gastemperatur) zum Druck p sowie zur Wahrscheinlichkeit für einen Ionisationsstoß. Für einen solchen Stoß benötigt das Elektron die kinetische Energie $eE\lambda_{ion} = E_{ion}$ ($E = U/d =$ elektrische Feldstärke, $E_{ion} =$ Ionisationsenergie).

gie), d.h. eine Beschleunigungsstrecke von λ_{ion} . Es zeigt sich, daß in einem Gas die freie Weglänge $\lambda_{inel} = 1/n\sigma_{inel}$ für andere inelastische Stöße (Dissoziation von Molekülen, Anregung der Atome) weitaus geringer ist (σ_{inel} = Wirkungsquerschnitt für inelastische Streuung, n = Gas(Neutral)dichte). Die in der Gasentladung beobachtete Leuchterscheinung entspricht gerade der Linienstrahlung solcher Atome, die durch Elektronenstoß angeregt wurden. Analog zur Abschwächung eines Teststrahls in einem Medium durchläuft nur der Bruchteil $\exp(-\lambda_{ion}/\lambda_{inel})$ die Strecke λ_{ion} ohne Energieverlust. Damit finden wir für den ersten Townsendkoeffizient

$$\alpha = c_1 p e^{-\lambda_{ion}/\lambda_{inel}} = c_1 p e^{-c_2 p/E}. \quad (1.3)$$

Wir können diesen Zusammenhang in die Zündbedingung (1.2) einsetzen und erhalten (mit $U_{zuend} = Ed$ und unter Berücksichtigung von $\gamma \ll 1$)

$$U_{zuend} = \frac{c_2 p d}{\ln(c_1 p d) - \ln \ln \frac{1}{\gamma}}. \quad (1.4)$$

Diese Bedingung liefert die Zündkurve als Funktion des Parameters pd . Diese als *Paschenkurve* bekannte Funktion ist in Fig. 1.2 dargestellt.

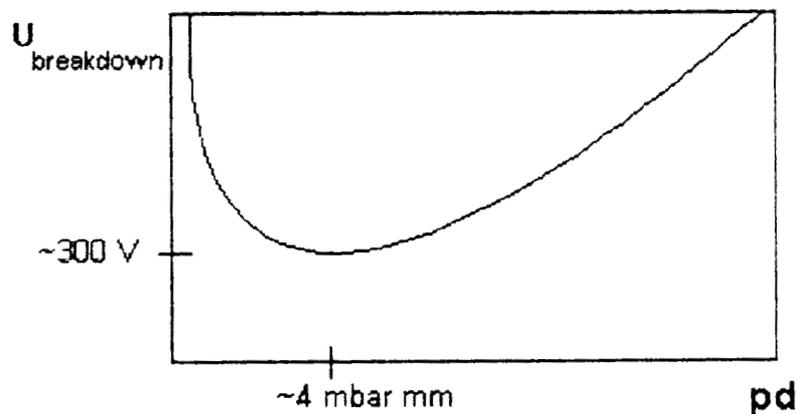


Abbildung 1.2: Zündspannung einer Glimmentladung in Abhängigkeit von pd für Luft (Paschenkurve)

Der absolute Wert der Zündspannung hängt von der Gasart ab; für Luft ergibt sich ein Minimum bei 0.4 Pa m. Für großes pd steigt U fast linear an; diese Abhängigkeit kommt von der E/p Abhängigkeit von α , d.h. die kleinere freie Weglänge eines Elektrons bei höherem Druck muß durch ein stärkeres elektrisches Feld kompensiert werden. Für kleines pd erfolgen kaum noch ionisierende Stöße, da die freie Weglänge groß gegen die Röhrenlänge ist (Elektronen

können von der Kathode zur Anode laufen, ohne einen Stoß auszuführen. Im Minimum der Paschenkurve sind freie Weglänge und Röhrenlänge näherungsweise gleich.

Die hier dargestellte Gasentladung bezeichnet man als *Glimmentladung*; bei niedrigerem Gasdruck erwärmt sich das Kathodenmaterial, und die Elektronenemission wird hauptsächlich durch Glühemission verursacht (die thermische Energie der Elektronen des Kathodenmaterials erniedrigt die Austrittsarbeit, so daß das elektrische Feld dem Kathodenmaterial Elektronen entreißt); man spricht dann von einer *Bogenentladung*. Ein bekanntes Beispiel ist der Kohlebogen.

1.2 Vorläufige Definition und Eigenschaften

Nach dem obigen Experiment definieren wir ein Plasma als ein ionisiertes Gas. Wegen der großen Reichweite der Coulombkräfte zwischen geladenen Teilchen ($\propto r^{-2}$ gegenüber r^{-7} für die Van-der-Waals Kräfte zwischen neutralen Atomen) verhält sich auch ein teilionisiertes Gas oft wie ein Plasma. Auf eine genauere Definition kommen wir im nächsten Kapitel zurück. Kennzeichnend für den Plasmazustand ist die durch die große Anzahl von freien Ladungsträgern bestimmte Leitfähigkeit. Ein Plasma kann daher durch elektromagnetische Felder beeinflusst werden.

Oft bezeichnet man den Plasmazustand auch als den *vierten Aggregatzustand* der Materie; diese Bezeichnung bezieht sich auf die Sequenz, die ein Material bei steigender Temperatur durchläuft:

- Festkörper: Die Atome sitzen auf regelmässig angeordneten Gitterplätzen, die thermische Energie äußert sich in kollektiven Gitterschwingungen (Phononen)
- Flüssigkeit: Die Atome (Moleküle) sind frei beweglich, aber noch in Wechselwirkung
- Gas: Die neutralen Atome (Moleküle) sind weitgehend frei beweglich
- Plasma: Die neutralen Atome (Moleküle) sind in Ionen und Elektronen zerfallen. Die thermische Energie ist jetzt mindestens von der Größenordnung der Ionisationsenergie (z.B. 13.6 eV beim Wasserstoff). Man gibt daher in der Plasmaphysik die Temperatur grundsätzlich in Energieeinheiten an, d.h. $1 \text{ eV} \equiv 11\,600 \text{ K}$.

Allerdings liegt beim Übergang vom Gas zum Plasma kein Phasenübergang im thermodynamischen Sinne vor. Wie wir später sehen werden, kann dieser Übergang eher durch einen kontinuierlichen Prozeß beschrieben werden, ähnlich etwa der Dissoziation von Molekülen bei Erwärmung eines Gases.

1.3 Vorkommen

Mehr als 99 % der Materie liegen im Plasmazustand vor. Dies hat seinen Grund darin, daß sämtliche Fixsterne und auch ein Großteil der intergalaktischen Materie Wasserstoffplasmen

mit kleinen Zusätzen (z.B. Helium) sind. Diese Aussage berücksichtigt nicht die mögliche Existenz massiver Neutrinos, die unseren heutigen Beobachtungsmethoden verborgen bleiben. Im folgenden wird ein Überblick über das Vorkommen von Plasmen in der Astrophysik und auf der Erde (Laborplasmen) gegeben.

1.3.1 Astrophysikalische Plasmen

Die ersten Untersuchungen heißer Plasmen wurden an astrophysikalischen Objekten vorgenommen. Insbesondere bei der Aufklärung der Physik der Sternatmosphären konnte durch Einsatz spektroskopischer Methoden ein erster Einblick in das Verhalten der Materie im Plasmazustand gewonnen werden.

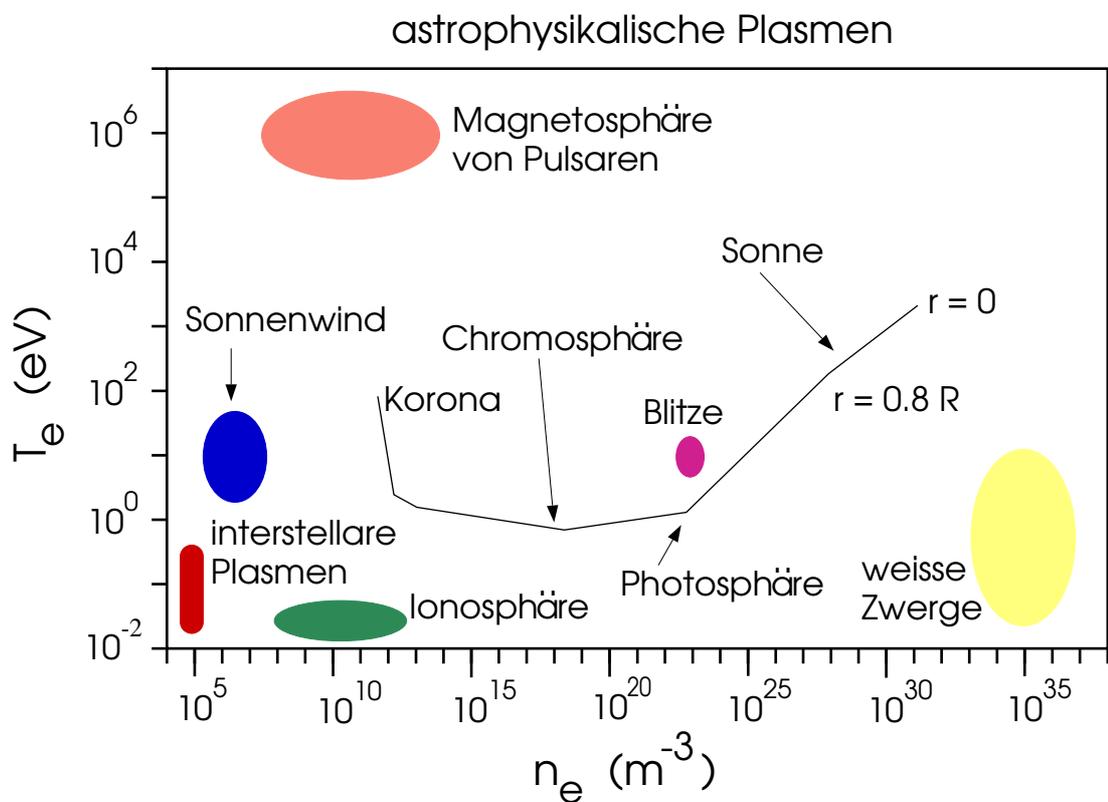


Abbildung 1.3: n - T Diagramm astrophysikalischer Plasmen

Figur 1.3 zeigt einen Überblick über die Variation von Dichte n und Temperatur T in verschiedenen kosmischen Objekten. Da es sich hauptsächlich um Wasserstoffplasmen handelt, gilt hier in guter Näherung $n_e = n_i = n$. Man beachte die weite Variation, vor allem der Dichte (über 30 Größenordnungen).

- Zwischen den Himmelskörpern (*intergalaktischer, interstellarer* und *interplanetarer Raum*) variiert die Dichte über den großen Bereich von ca. $0.1 - 10^{15} \text{ m}^{-3}$. Die Tempe-

ratur dieser Plasmen variiert zwischen $\approx 1\text{-}100$ eV. (Zum Vergleich: Vakuumapparaturen auf der Erde erreichen bei Raumtemperatur ($T = 1/40$ eV) z.B. Drucke von 10^{-6} Pa (Atmosphärendruck 10^5 Pa), entsprechend Gasdichten von $\approx n = 10^{14}$ m^{-3} ; die Gasdichte der Erdatmosphäre liegt bei Raumtemperatur und Atmosphärendruck bei $n \approx 2.5 \times 10^{25}$ m^{-3}).

- Gänzlich andere Verhältnisse ergeben sich für das *Innere der Sterne*. So treten z.B. im Inneren unserer Sonne ($r = 0$ in Fig. 1.3) Temperaturen bis zu 1.5 keV auf. Die Dichte ist mit 10^{32} m^{-3} ca. 1000 mal höher als im Festkörper, der Druck erreicht somit nach $p = nkT$ den Wert von ca. 2.5×10^{16} Pa (und liegt um 11 Größenordnungen über dem Atmosphärendruck!). Unter diesen extremen Bedingungen laufen Kernfusionsprozesse (Verschmelzung von Wasserstoff zu Helium) ab, aus denen die Fixsterne ihre Energie beziehen.
- Noch höhere Werte (bis zu 10^{37} m^{-3}) nimmt die Dichte in den sogenannten *weißen Zwergen* an. Dies sind Sterne, die bereits ihren gesamten Wasserstoffvorrat verbrannt haben und zu kompakten Objekten kontrahiert sind. In ihrem Inneren findet sich ein Magnetfeld von bis zu 1000 T. Noch höhere Dichten (10^{42} m^{-3}) und Magnetfelder (10^8 T) erreichen die *Neutronensterne*, d.h. kollabierende Sterne oder weiße Zwerge. Hier liegt die Materie allerdings nicht mehr als Plasma vor, da nahezu alle Elektronen und Protonen zu Neutronen verschmolzen sind (inverser β -Zerfall). Auf die Bedingung für den Kollaps weißer Zwerge (Chandrasekhar-Grenze) werden wir bei der Behandlung relativistischer, entarteter Plasmen zurückkommen.
- Ein astrophysikalisches Plasma hoher Temperatur (≈ 1 MeV) und niedriger Dichte ($\approx 10^{10}$ m^{-3}) bildet sich an der Oberfläche eines Neutronensterns. Aufgrund des hohen Gravitationspotentials in der Umgebung des Neutronensterns fließt Materie aus der Umgebung (auch von evtl. benachbarten Sternen) zum Neutronenstern hin. Bei dieser materiellen Akkretion bildet sich das erwähnte heiße Plasma in der Außenzone des Neutronensterns. Die geladenen Teilchen fließen entlang der Magnetfeldes des Neutronensterns und stürzen im Bereich der Pole mit nahezu Lichtgeschwindigkeit in das Innere. Dabei senden sie relativistische Zyklotronstrahlung (Synchrotronstrahlung) aus. Fällt die Rotationsachse des Neutronensterns nicht mit der Lage des magnetischen Dipolvektors zusammen, so kann der Beobachter eine pulsierende Lichtemission sehen (Leuchteffekt). Man spricht daher bei diesen Gebilden auch von *Pulsaren*. Aufgrund der schnellen Rotation der Neutronensterne kann die Pulsfrequenz im Bereich 0.1 bis einige Hz liegen. Da das Plasma an der Oberfläche des Pulsars im wesentlichen vom Magnetfeld des Neutronensterns beeinflusst wird, spricht man hier von der *Magnetosphäre*.

Fig. 1.3 zeigt auch den weiten Parameterbereich, der in der Sonne sowie ihrer Atmosphäre überstrichen wird. Vom Sonneninneren fallen Dichte und Temperatur kontinuierlich bis zum Rand, an dem sich die Photosphäre befindet. Man hat es hier mit Temperaturen $T \leq 1$ eV und Dichten $n_e \leq 10^{23}$ m^{-3} zu tun. Dies ist der Bereich, aus dem die für uns sichtbare Strahlung der Sonne kommt; bei $T = 5700\text{K}$ hat das (kontinuierliche) Spektrum ein Maximum

im grünen Bereich. Hier treten sehr starke Dichtegradienten auf, es schließt sich nach außen hin die Chromosphäre mit Temperaturen unter 4000 K an. Hier rekombiniert das Plasma zum Teil in H und H₂. Darauf steigt die Temperatur mit weiterer Entfernung vom Sonnenzentrum wieder an, um in der Sonnenkorona ein Maximum von ca. 200 eV anzunehmen. Dieser Temperaturanstieg ist durch Schockwellen, die von der Sonnenoberfläche ausgehen und das Koronaplasma aufheizen, gegeben. In diesem Gebiet spielt auch das Magnetfeld der Sonne eine Rolle, Phänomene wie Protuberanzen zeigen deutliche Beeinflussung des Koronaplasmas durch die Magnetfelder. Außerhalb von ca. 3 Sonnenradien ($R_{\text{Sonne}} \approx 696000 \text{ km}$) geht das Koronaplasma kontinuierlich in den Sonnenwind, der als Teilchenstrom in das interplanetare Plasma gelangt, über.

Beim Auftreffen des Sonnenwindes auf die Atmosphäre der Erde wird energetische Teilchenstrahlung freigesetzt, welche die Erde als 'Höhenstrahlung' erreicht. Geladene Teilchen wandern dabei im Erdmagnetfeld auf die Pole zu und erzeugen bei ihrem Auftreffen auf die Ionosphäre in etwa 100 km Höhe Leuchterscheinungen, die sogenannten *Nordlichter*. Die Ionosphäre selbst stellt ein dünnes Plasma dar, sie ist unter anderem für die Reflexion langwelliger Radiowellen von Bedeutung.

Weitere Plasmaerscheinungen in der Erdatmosphäre stellen die Blitze dar; es handelt sich hierbei um Gasentladungen bei hohem Druck (Funkenentladung). Die uns umgebende Atmosphäre selbst ist ein neutrales Gasgemisch; Plasmen treten auf der Erde nur als künstlich erzeugte Erscheinung auf. Mit diesen *Laborplasmen* werden wir uns nun beschäftigen.

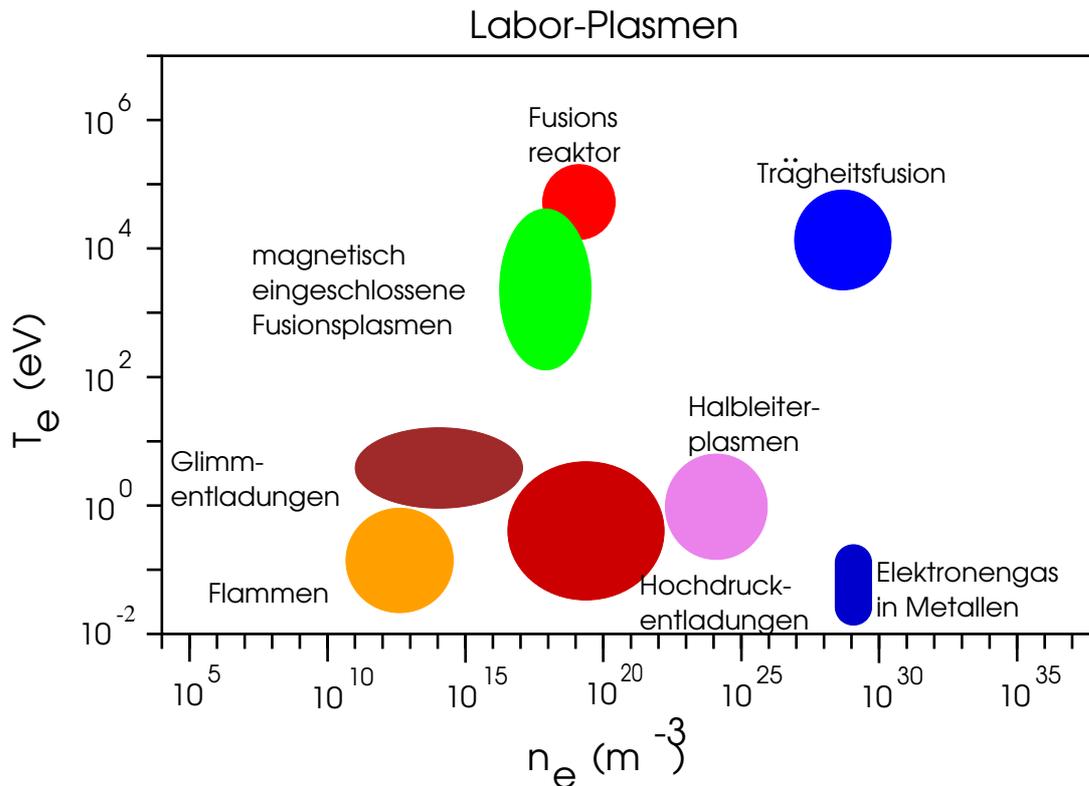
1.3.2 Laborplasmen

Fig. 1.4 zeigt den Temperatur und Dichtebereich typischer Laborplasmen. Im folgenden werden wir kurz die unterschiedlichen Typen beschreiben.

Industrielle Anwendungen

In der Industrie kommen Plasmen bei den unterschiedlichsten Anwendungen zum Einsatz, wir erwähnen exemplarisch einige wenige Aspekte:

- In *Gasentladungslampen* wird die oben beschriebene Gasentladung zur Lichterzeugung verwendet. Wie bereits erwähnt, sind Gase in Entladungsröhren nur teilionisiert, viele Stöße führen zur Anregung von Atomen; diese senden dann Photonen aus. Da die in einer Glimmentladung erzeugte Strahlung oftmals bis in den UV-Bereich reicht, wird in der *Leuchtstoffröhre* der Glaszylinder mit einem fluoreszierenden Material beschichtet, das die UV-Photonen in sichtbares Licht konvertiert. Ohne diese Beschichtung würde eine Neonröhre z.B. rotes Licht aussenden. Solche Lampen sind effektiver als Glühlampen, da die elektrische Energie primär in die Elektronen geht, welche für die Leuchterscheinung zuständig sind. In *Hochdrucklampen* wird eine Plasmaentladung optisch dick, d.h. sie reabsorbiert Photonen, und somit kann sich thermodynamisches Gleichgewicht einstellen. Eine solche Lampe emittiert dann ein breites Spektrum. Solche Entladun-

Abbildung 1.4: n - T Diagramm von Laborplasmen

gen sind technisch in kleinen Quarzröhren realisiert; die erreichten Leistungen reichen typisch bis zu ≈ 500 W.

- In der *Schaltertechnik* werden Plasmen dazu benutzt, kontrolliert große Ströme auszuschalten. Bei großen Strömen ergibt sich bei plötzlicher Unterbrechung des Stromkreises wegen der großen gespeicherten induktiven Energie $W = 1/2LI^2$ eine hohe Spannung an der Unterbrechungsstelle. Dort kann sich eine Bogenentladung ausbilden. Die Kontrolle dieses Bogens kann z.B. durch gezieltes Zusetzen von Gasen erreicht werden.
- In der *Plasma-Prozess-technik* werden Plasmaentladungen dazu verwendet, gezielt Oberflächen auf- oder abzutragen. Dabei kann der Prozess sowohl physikalisch, d.h. durch Stoß mit energetischen Plasmateilchen, als auch chemisch, d.h. durch Reaktion mit Komponenten des Plasmas, erfolgen. Beispiele sind die Beschichtung von Oberflächen oder die Profilgebung durch Plasmaätzen oder Materialauftragung (unter Verwendung entsprechender Masken). Letzterer Prozess hat vor allem im Zusammenhang mit der Herstellung von Chips große technische Bedeutung erlangt. Der Vorteil der Plasmatechnologie liegt hier in der gezielten Steuerung der Oberflächenprozesse durch die Zusammensetzung und die Parameter des Plasmas.

Fusionsplasmen

Wie bereits oben erwähnt, bildet die Kernfusion, vor allem die Verschmelzung von Wasserstoffisotopen zu Helium, die Grundlage für die Energiegewinnung der Sterne. Wie wir gesehen haben, herrschen im Sonneninneren typisch sehr hohe Dichten und Temperaturen. Die Teilchen sind bei solch hohen Dichten durch die Gravitation eingeschlossen. Auf der Erde versucht man seit ca. 1950, den Fusionsprozeß zur Energiegewinnung zu nutzen. Dabei werden im wesentlichen zwei unterschiedliche Konzepte verfolgt:

- Bei der *Trägheitsfusion* sollen kleine Wasserstoffpellets durch intensive Bestrahlung mit Laserlicht oder Schwerionenstrahlen sehr schnell erhitzt werden. Das dabei ablatierte Material komprimiert durch seinen Rückstoß das Zentrum des Pellets; für kurze Zeiten (\approx ns) werden hohe Temperaturen (einige keV) und Dichten (10-100 fache Festkörperdichte) erreicht. Dabei können Fusionsprozesse ablaufen.
- Bei der *magnetischen Fusion* werden die Plasmateilchen durch Magnetfelder eingeschlossen und durch unterschiedliche Methoden aufgeheizt. Dabei werden Temperaturen von über 40 keV bei niedrigen Dichten ($\approx 10^{20} \text{ m}^{-3}$) erreicht.

Beide Methoden haben bisher noch nicht zu einem industriell nutzbaren Reaktor geführt; die Beschreibung der unterschiedlichen Konzepte und ihres Fortschritts in Richtung auf den Reaktor wird den Hauptteil des zweiten Teils der Vorlesung bilden.

Festkörperplasmen

Die freibeweglichen Elektronen in Metallen und Halbleitern können auch als Plasma aufgefaßt werden. Einige der später zu beschreibenden kollektiven Effekte, denen ein Plasma unterliegt, sind in der Tat aus der Festkörperphysik bestens bekannt. Ein Beispiel ist die Abschirmung elektromagnetischer Strahlung durch das frei bewegliche Elektronengas; sie sorgt dafür, daß Metalle im sichtbaren Spektralbereich reflektierend sind. Darauf werden wir im nächsten Kapitel genauer eingehen.

Kapitel 2

Plasmacharakteristika

Im folgenden wollen wir die Plasmen näher einordnen und charakterisieren. Während wir im vorhergehenden Kapitel vor allem nach dem Vorkommen unterschieden haben, werden wir nun die physikalischen Grenzen besprechen, welche verschiedene Plasmatyphen voneinander trennen. Danach werden wir auf besonders wichtige Plasmacharakteristika, die Quasineutralität und damit verbundene Effekte sowie das Plasmapotential eingehen.

2.1 Zustandsgrenzen

Fig. 2.1 zeigt verschiedene Grenzen, innerhalb derer wir unterschiedliche physikalische Beschreibungsweisen anzuwenden haben. Das Diagramm ist wiederum ein n - T Diagramm.

2.1.1 Ideale Plasmen

Der Begriff des idealen Plasmas ist in Anlehnung an das ideale Gas definiert: Dort spricht man von idealen Bedingungen, wenn man die Wechselwirkung der einzelnen Teilchen untereinander gegenüber der thermischen Bewegung der Teilchen vernachlässigen kann. Dies ist im Falle des neutralen Gases die Van-der-Waals Wechselwirkung, beim Plasma, wie oben erwähnt, die Coulombwechselwirkung. Der mittlere Abstand zwischen zwei Teilchen ist durch $1/n^{1/3}$ gegeben, daraus folgt als Bedingung für das *ideale Plasma* (durch Gleichsetzen von thermischer Energie und Coulombenergie)

$$3/2kT > \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}n^{1/3} \rightarrow T[\text{eV}] > 0.97 \times 10^{-9}(n[\text{m}^{-3}])^{1/3} \quad (2.1)$$

Diese Grenze ist in Fig. 2.1 eingetragen. Wie man sieht, sind große Teile der im vorherigen Kapitel beschriebenen Plasmen als ideale Plasmen zu behandeln. Bei nichtidealen Bedingungen kann es zu einer neuen Sorte von kollektiven Effekten kommen (man denke an den Phasenübergang beim Van-der-Waals Gas).

Inbesondere gelten im idealen Plasma für jede Teilchensorte α die idealen Gasbedingungen

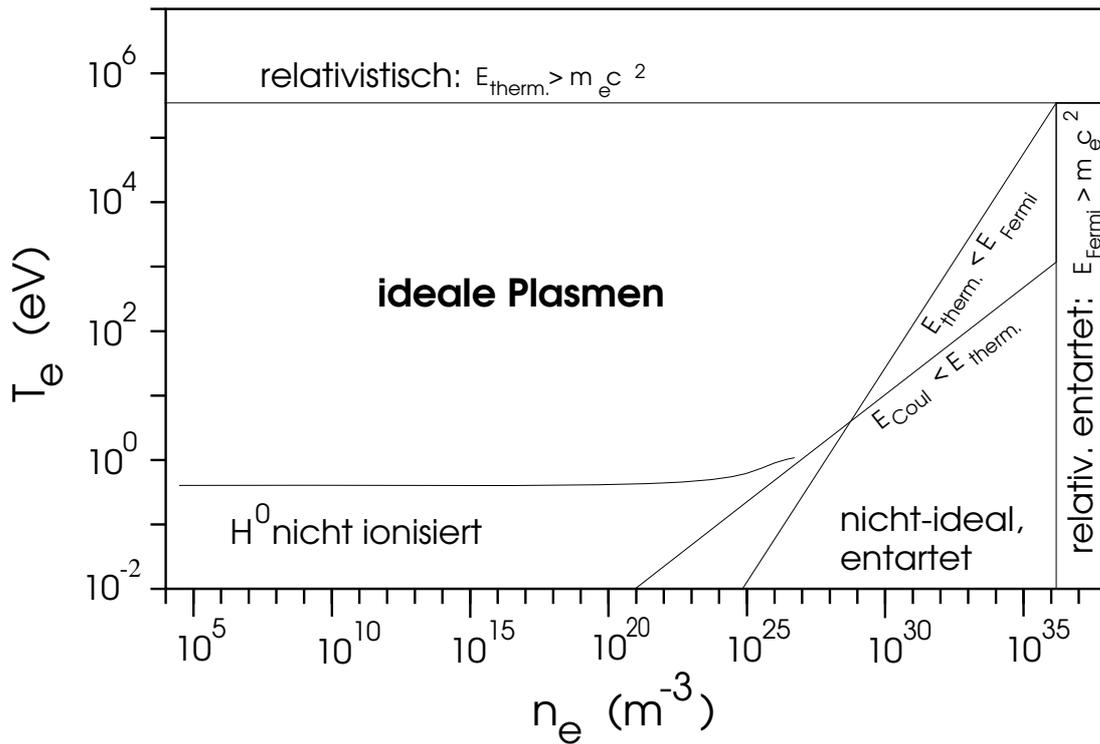


Abbildung 2.1: Zustandsgrenzen von Plasmen

$$p_\alpha = n_\alpha k T_\alpha \quad (2.2)$$

$$U_\alpha = 3/2 n_\alpha k T_\alpha \quad (2.3)$$

für den Druck p_α und die innere Energiedichte U_α . Zur Berechnung der Energie der Sorte α ist n_α durch die Teilchenzahl N_α zu ersetzen, d.h. $n_\alpha = N_\alpha/V$, wobei V das Volumen ist. Desweiteren ergeben sich der Gesamtdruck und die Gesamtenergie durch einfache Summation über alle Spezies (z.B. Elektronen und Ionen).

2.1.2 Ionisationsgrenze

Eine untere Grenze für den Temperaturbereich, in dem Plasmen existieren, ergibt sich durch die Ionisationsgrenze, d.h. die Kurve, unterhalb derer praktisch alle Teilchen als neutrale Atome vorliegen. Wir haben bereits argumentiert, daß diese Grenze in der Nähe von $kT \approx E_{ion}$ liegen muß. Eine genauere Rechnung (Saha-Ionisationsgleichgewicht) ergibt, daß für Wasserstoff bei Temperaturen ≥ 1 eV in einem weiten Dichtebereich mehr als 50 % des Gases ionisiert sind, das bedeutet für den *Ionisationsgrad* X

$$X = \frac{n_e}{n_e + n_0} \geq 0.5 \quad (2.4)$$

(n_0 ist die Dichte der neutralen Teilchen). Diese Grenze ist in Fig. 2.1 eingetragen. Man sieht, daß bis zu Dichten von ca. 10^{25} m^{-3} ein Wasserstoffplasma überhaupt nur im idealen Zustand vorliegen kann; oberhalb dieser Dichte treten andere Effekte auf (Erniedrigung der Ionisationsenergie durch Mikrofelder), welche für X eine genauere Betrachtung erfordern.

2.1.3 Relativistische Grenze

Eine neue Art der Behandlung muß benutzt werden, wenn die thermische Energie der Elektronen die Ruhemasse von 511 keV überschreitet; in solchen *relativistischen* Plasmen wird die Relativitätstheorie zur Beschreibung angewandt, außerdem steht ausreichend Energie zu spontaner Teilchenerzeugung / Vernichtung zur Verfügung. Allerdings muß darauf hingewiesen werden, daß in einem thermischen Plasma von z.B. 10 keV durch die Boltzmannverteilung der Energie bereits ein Anteil von Elektronen vorliegt, welche relativistische Energie aufweisen. Auch können nichtthermische Elektronen durch elektrische Felder auf relativistische Geschwindigkeit beschleunigt werden. In diesen Fällen ist die Bedingung für das relativistische Plasma global nicht gegeben, die schnellen Teilchen können aber trotzdem relativistische Effekte zeigen. Wir werden einen solchen Fall bei den Runawayelektronen im Tokamak kennenlernen.

2.1.4 Entartung

Bei sehr hohen Dichten spielen quantenmechanische Aspekte eine wichtige Rolle. Nach dem Pauliprinzip können nicht zwei Teilchen im gleichen quantenmechanischen Zustand sein. Wir müssen daher die Zahl der möglichen Zustände abzählen. Für freie Teilchen im Kasten ergeben sich in der Quantenmechanik die Eigenfunktionen $\Psi = \Psi_0 \sin(p_n x / \hbar)$ mit $p_n = n\hbar\pi/L$ und $n > 0$ gefunden ($L = \text{Systemlänge}$). Bei festem L ist somit die Zahl der Zustände $N \sim p$. Für festes p gilt wiederum $N \sim L$. In einer kontinuierlichen Beschreibungsweise erhält man daher

$$dN = 2 \left(\frac{L}{\pi\hbar} \right)^3 d^3 p \text{ bzw. } d\mathcal{N} = 2 \frac{4\pi}{(\pi\hbar)^3} p^2 dp \quad (2.5)$$

für die *Zustandsdichte* $d\mathcal{N} = dN/L^3$. Der Faktor 2 kommt von der Spinentartung. Wir haben dabei im sog. *Phasenraum* $d^3x d^3p$ Kugelsymmetrie angenommen, da die Energie des freien Teilchens $E = p^2/(2m)$ nur vom Betragsquadrat des Impulses abhängt. Um die Energieabhängigkeit der Zustandsdichte zu berechnen, verwenden wir $dE/dp = p/m$ und erhalten

$$\frac{d\mathcal{N}}{dE} = g(E) = \frac{\sqrt{2m^3}}{\pi^2 \hbar^3} \sqrt{E} \quad (2.6)$$

Dies ist die Zahl der mit dem Pauliprinzip verträglichen Zustände pro Energie und Volumen. Hier mußte noch berücksichtigt werden, daß im Impulsraum wegen $n_x > 0, n_y > 0, n_z > 0$ nur ein Oktant der Kugel gezählt werden darf. Zur Energie E existieren $g(E)VdE$ Zustände; man spricht daher auch von der *Entartungsdichte* $g(E)$.

Bei $T = 0$ (keine thermischen Fluktuationen) wird ein System von Fermionen daher alle Zustände, beginnend mit $E = 0$, besetzen. Für N Teilchen ergibt sich also für die Besetzungsdichte n (d.h. die Zahl der Teilchen N pro Volumen V)

$$n = \int_0^{N/V} d\mathcal{N} = \int_0^{E_{max}} g(E) dE = \frac{2}{3\pi^2} \frac{\sqrt{2m^3}}{\hbar^3} E_{max}^{3/2} \quad (2.7)$$

Die höchste Energie E_{max} wird als Fermi-Energie E_F bezeichnet. Man erhält

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2)^{2/3} n^{2/3} \quad (2.8)$$

Im Impulsraum sind dann alle Zustände innerhalb einer Kugel mit Radius $p_F = \sqrt{2mE_F}$ besetzt (*Fermi-Kugel*). Für $T \neq 0$ muß die Besetzungswahrscheinlichkeit $f(E)$ für einen Zustand mit Energie E nach der *Fermi-Verteilung*

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{kT}} + 1} \quad (2.9)$$

berechnet werden. Für $T = 0$ ist dies eine Stufenfunktion mit Stufe bei $E = E_F$, für $kT \gg E_F$ geht sie in die Boltzmannverteilung

$$f(E) = A e^{-\frac{E}{kT}} \quad (2.10)$$

über. Hierbei ist A eine Normierungskonstante: $A = \exp(\mu/(kT))$, wobei μ das sog. *chemische Potential* ist. Für $T = 0$ ist $\mu = E_F$; für $T > 0$ muß A durch $A \int f(E) dE = 1$ bestimmt werden. Die tatsächliche Besetzungsdichte ist durch das Produkt aus Zustandsdichte und Besetzungswahrscheinlichkeit gegeben:

$$dn_e(E) = g(E) f(E) dE \quad (2.11)$$

Diese Funktion ist für den entarteten Fall ($kT \ll E_F$) und für den klassischen Fall ($kT \gg E_F$) in Fig. 2.2 dargestellt.

Bei $kT \ll E_F$ ist ein Plasma somit als ideales Fermi-Gas zu beschreiben, die elektrostatische Wechselwirkung ist wiederum vernachlässigbar. Durch die Massenabhängigkeit von (2.8) wird die Grenze $kT < E_F$ zuerst von den Elektronen erreicht; im Diagramm 2.1 ist daher die Grenze

$$3/2kT = E_{F, \text{Elektronen}} \rightarrow T[\text{eV}] = 2.42 \times 10^{-19} (n[\text{m}^{-3}])^{2/3} \quad (2.12)$$

eingetragen. Sie schneidet die Grenze für ideale Plasmen bei $n_e = 6.4 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$.

2.1.5 Relativistische Entartung

Eine weitere Grenze ergibt sich, wenn die Fermi-Energie die relativistische Energie überschreitet ($E_F > 511 \text{ keV}$). Dann muß beim Abzählen der Zustände im Phasenraum berücksichtig

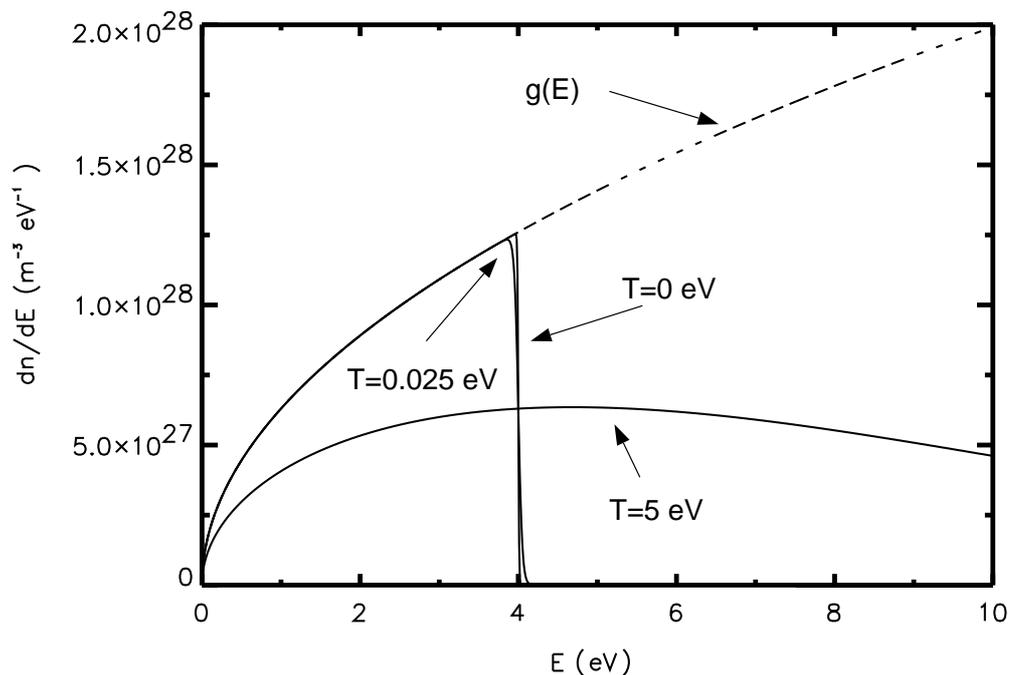


Abbildung 2.2: Besetzungsdichte für ein Elektronengas mit $E_F = 4$ eV (Festkörper). Im Fall $T = 0$ werden alle Zustände bis zu E_F ideal besetzt; für $T = 1/40$ eV (Raumtemperatur) treten kleine Abweichungen auf. Bei $T = 5$ eV wird die Besetzungsdichte von der Boltzmannstatistik bestimmt, die ideale Zustandsdichte wird nicht erreicht.

sichtigt werden, daß die Energie-Impuls-Beziehung von $E = p^2/(2m)$ zu $E = pc$ übergeht. Man erhält dann

$$E_{F,rel} = p_{Fc} = \hbar c(3\pi^2)^{1/3} n^{1/3} \quad (2.13)$$

Die Fermi-Energie steigt also im relativistischen Fall mit einer niedrigeren Potenz der Dichte.

Anwendung: Die Chandrasekhar-Grenze

Eine Anwendung der Theorie entarteter Plasmen stellt die sogenannte *Chandrasekhar Grenze* für die Masse eines Sterns dar. In einem hochdichten Stern oder Sternüberrest (weißer Zwerg) liegt das Elektronengas entartet vor. Ist $E_F \ll 511$ keV, so ist das Kräftegleichgewicht durch die Bilanz zwischen der anziehenden Wirkung der Gravitation und dem bei einer Kontraktion steigenden Gasdruck gegeben. Zur Abschätzung des Gleichgewichtsverhaltens betrachten wir die mit der Gravitation verknüpfte Energie E_{pot} : analog zur Coulombenergie $3/5Q^2/R$ der homogen geladenen Kugel gilt

$$E_{pot} \sim M^2/R \quad (2.14)$$

Diese Energie wird frei, wenn sich Materie der Gesamtmasse M aus dem Unendlichen zu einem Stern vom Radius R formiert.

Die der Kontraktion entgegenwirkende innere Energie U des Gases ist im entarteten Fall proportional zur Anzahl N der Teilchen und zur Fermi-Energie. Wegen $n = N/V$, $V \sim R^3$ und $M \sim N$ gilt im nicht-relativistischen Fall

$$U \sim N(N/V)^{2/3} \sim M^{5/3}/R^2 \quad (2.15)$$

Somit wird bei einer Kontraktion zwar $E_{pot} \sim 1/R$ gewonnen, andererseits erhöht sich aber die innere Energie $U \sim 1/R^2$. Wegen der stärkeren R -Abhängigkeit von U existiert somit immer ein Gleichgewichtsradius R .

Dies ändert sich, wenn die Dichte so hoch wird, daß die Fermi-Energie relativistisch berechnet werden muß. Dann gilt nach Gl. (2.13)

$$U \sim N(N/V)^{1/3} \sim M^{4/3}/R \quad (2.16)$$

Damit steigt die innere Energie im gleichen Maße, wie potentielle Energie bei der Kontraktion frei wird. Die Gleichgewichtsbedingung kann nun nur noch für *eine* Masse erfüllt werden. Diese kritische Masse liegt bei ca. 1.4 Sonnenmassen (Chandrasekhar, 1931). Leichtere Sterne kontrahieren nicht bis ins relativistisch entartete Gebiet, d.h. sie werden zu einem weissen Zwerg. Schwerere Sterne stürzen an der Grenze zum relativistischen Gebiet in sich zusammen und werden zum Neutronenstern oder zum schwarzen Loch. Eine solche Sternexplosion wird als Supernova zweiter Art bezeichnet. Es besteht auch die Möglichkeit, dass weisse Zwerge in Doppelsternsystemen so viel Masse akkretieren, dass sie die kritische Masse überschreiten und dann explodieren. Diese Supernovae erster Art laufen erheblich reproduzierbarer ab als die Explosion von Sternen mit überkritischer Masse. Auf jeden Fall aber existieren keine stabilen relativistisch entarteten Plasmen.

Abschließend bleibt aber festzustellen, daß die nichtentarteten, nichtrelativistischen, idealen Plasmen einen großen Teil des Parameterraums ausfüllen; wir werden es daher im weiteren Verlauf der Vorlesung meistens mit solchen Plasmen zu tun haben. Die Beschreibung erfolgt dann mit der klassischen Mechanik / Elektrodynamik / Thermodynamik; Quanteneffekte und relativistische Phänomene spielen keine Rolle.

2.2 Quasineutralität

Ein wichtiges Merkmal von Plasmen ist, daß sie fast immer *quasineutral* erscheinen, d.h. es gilt in guter Näherung

$$\frac{n_e - \sum_i Z_i n_i}{n_e} \ll 1 \quad (2.17)$$

wobei die Ionen die Ladung Z_i tragen sollen.

2.2.1 Die Plasmanäherung

Eine einfache Abschätzung für ein Wasserstoffplasma ($Z_i = 1$) zeigt bereits, daß kleine Ladungstrennung zu hohen elektrischen Feldern führt: Ein Plasma mit $T = 5$ keV besitzt bei Atmosphärendruck die Dichte von $\approx 6 \times 10^{22} \text{ m}^{-3}$. In einer lokalen Umgebung von $\delta x \approx 1$ mm sei die Quasineutralität zu 1 % verletzt, d.h. beispielsweise $n_e = 0.99n_i$. Das resultierende elektrische Feld läßt sich nach

$$\nabla E = \rho/\epsilon_0 \rightarrow E \approx 0.01 n_e e \delta x / \epsilon_0 \quad (2.18)$$

abschätzen. Für das oben angegebene Zahlenbeispiel ergibt sich $E = 10^{11}$ V/m. Ein solch unrealistisch hohes Feld kann in der Realität nicht aufrecht erhalten werden, die freien Ladungsträger des Plasmas gruppieren sich so um, daß Quasineutralität gewährleistet ist. In der sogenannten *Plasmanäherung* setzt man daher oft $n_e = Z_i n_i$, berücksichtigt aber Abweichungen von der Quasineutralität durch $\nabla E \neq 0$.

2.2.2 Debye-Abschirmung

Wir wollen die Abschirmung elektrischer Felder innerhalb des Plasmas quantitativ untersuchen. Dazu denken wir uns eine Testladung im Ursprung des Koordinatensystems. Dann müssen wir die Poissongleichung in Kugelkoordinaten unter der Annahme sphärischer Symmetrie (keine Winkelabhängigkeit) lösen

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = -\rho/\epsilon_0 = -\frac{q\delta(r)}{\epsilon_0} + e \frac{n_e - n_i}{\epsilon_0} \quad (2.19)$$

für ein Wasserstoffplasma. Im Falle einer Punktladung im Vakuum hätten wir auf der rechten Seite nur die δ -Funktion und für $r \neq 0$ $\Delta\Phi = 0$ zu lösen. Für diesen Fall ergibt sich der $1/r$ Abfall des Coulombpotentials. Jetzt haben wir auf der rechten Seite das Plasma zu behandeln. Die Dichteverteilung in Abhängigkeit von der potentiellen Energie $q\Phi$ ist durch die Boltzmannverteilung gegeben (Gl. (2.10)) im klassischen Fall:

$$dN \sim e^{-\frac{E}{kT}} d^3x d^3p \sim e^{-\frac{m/2v^2 + q\Phi(r)}{kT}} d^3x d^3v \quad (2.20)$$

Wir können über den geschwindigkeitsabhängigen Teil der Verteilungsfunktion integrieren und erhalten einen Ausdruck für die Dichte im Ortsraum

$$n = \frac{dN}{d^3x} = n_0 e^{-\frac{q\Phi}{kT}} \quad (2.21)$$

wobei n_0 die mittlere Dichte bezeichnet. In der Plasmanäherung setzen wir $n_{e,0} = n_{i,0}$. Außerdem ist im idealen Plasma das Verhältnis von potentieller zu kinetischer Energie klein, so daß wir die Exponentialfunktionen entwickeln können:

$$n_e - n_i = n_{e,0} (e^{\frac{e\Phi}{kT}} - e^{-\frac{e\Phi}{kT}}) \approx n_{e,0} \left(1 + \frac{e\Phi}{kT} - \left(1 - \frac{e\Phi}{kT} \right) \right) = 2n_{e,0} \frac{e\Phi}{kT} \quad (2.22)$$

Wir gehen mit diesem Ansatz in die Poissongleichung und erhalten für $r \neq 0$ die Lösung

$$\Phi(r) = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-\frac{\sqrt{2}r}{\lambda_D}} \quad (2.23)$$

wobei wir die Debye-Länge

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 kT}{n_{e,0} e^2}} = 7437 \sqrt{\frac{T[\text{eV}]}{n[\text{m}^{-3}]}} \text{ [m]} \quad (2.24)$$

eingeführt haben.

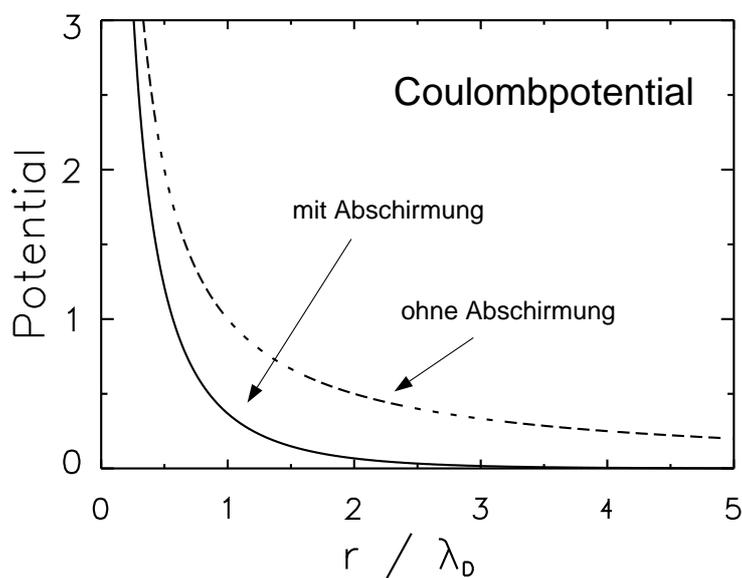


Abbildung 2.3: Coulombpotential im Vakuum und mit Abschirmung

Für $r \ll \lambda_D$ ist die Exponentialfunktion in guter Näherung 1, und wir haben das normale Coulombpotential. Für $r \gg \lambda_D$ verschwindet das Potential exponentiell, d.h. wesentlich schneller als der $1/r$ Vakuumabfall. Das Potential der Testladung wird daher für Entfernungen größer der Debye-Länge durch das umgebende Plasma abgeschirmt. Dies ist möglich, da die dazu notwendige Erhöhung der potentiellen Energie $e\Phi$ nach Voraussetzung klein gegen die thermische Energie kT ist. Somit wird die Boltzmannverteilung kaum gestört. Fig. 2.3 vergleicht den Verlauf des Coulombpotentials im Vakuum und mit Abschirmung.

Fig. 2.4 zeigt die Größenordnung der Debye-Länge im Bereich der vorher behandelten Plasmen. Sie ist in weiten Gebieten klein gegen die typischen Systemabmessungen. So ergibt sich z.B. für ein Fusionsplasma (typische Abmessung 1-10 m) mit $T = 10 \text{ keV}$ und $n = 10^{20} \text{ m}^{-3}$ ein Wert von $\lambda_D \approx 70 \mu\text{m}$.

Bei der Ableitung der Debye-Länge hatten wir angenommen, daß Ionen und Elektronen nicht als Einzelteilchen, sondern durch ihre Dichteverteilung beschrieben werden können. Diese

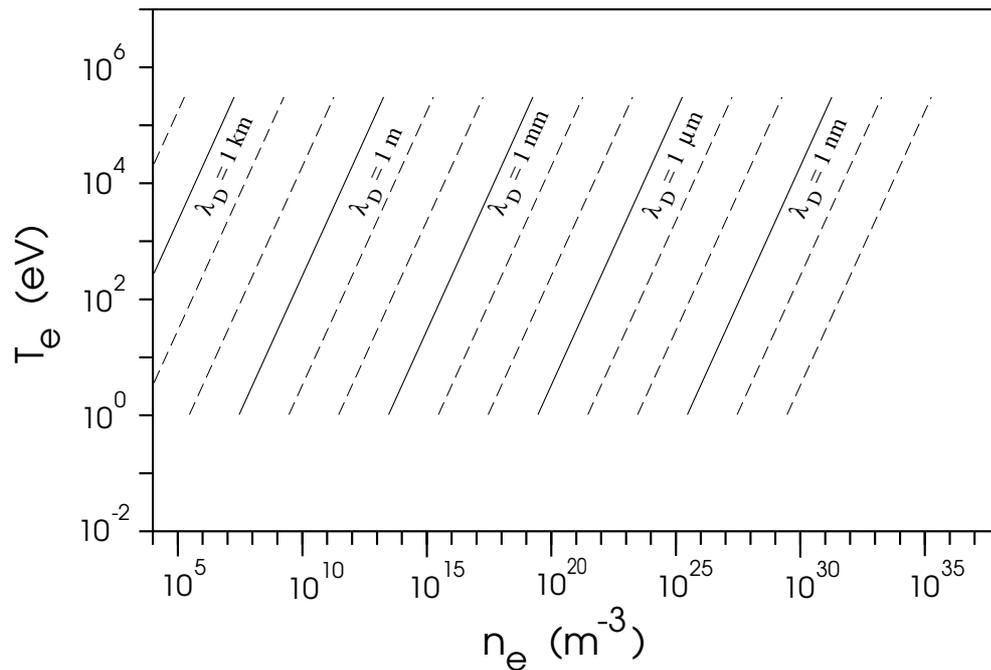


Abbildung 2.4: Typische Größenordnung der Debye-Länge

Kontinuumsbeschreibung ist nur dann zulässig, wenn in einem typischen Volumen viele Teilchen vorhanden sind. Wir müssen dies nachträglich für unsere Ableitung prüfen. Dazu definieren wir N_D , die Anzahl der Teilchen in einer Kugel vom Radius λ_D (sog. *Debye-Kugel*):

$$N_D = n_{e,0} \frac{4}{3} \pi \left(\frac{\epsilon_0 k T}{n_{e,0} e^2} \right)^{3/2} \quad (2.25)$$

Für $N_D \gg 1$ besteht die abschirmende Ladungswolke aus vielen Teilchen. Im Fall des Fusionsplasmas von 10 keV und 10^{20} m^{-3} ergibt sich $N_D \approx 10^8$, d.h. die Anwendung der Kontinuumstheorie war gerechtfertigt. Wie in Fig. 2.5 zu sehen ist, ist dies fast immer der Fall.

Die Bedingung $N_D = 1$ führt uns zu

$$T[\text{eV}] = 7 \times 10^{-9} n([\text{m}^{-3}])^{1/3} \quad (2.26)$$

Diese Grenze verläuft parallel zur Grenze $E_{pot} = kT$ für ein ideales Plasma und ist nur um ungefähr eine Größenordnung restriktiver; in einem ideales Plasma wird daher fast immer Debye-Abschirmung vorliegen. Im Falle des entarteten Elektronengases im Festkörper, in dem nicht mehr mit der Boltzmannstatistik gearbeitet werden darf, führt eine analoge Rechnung zum sogenannten 'Thomas-Fermi'-Radius, der hier die Debye-Länge ersetzt.

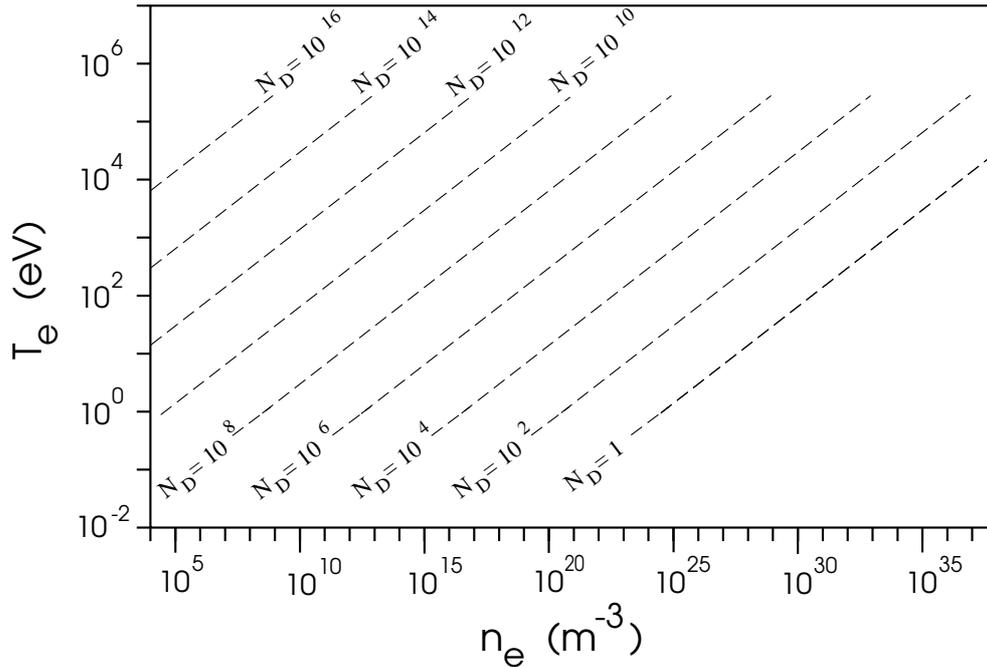


Abbildung 2.5: Zahl der Teilchen innerhalb einer Kugel vom Radius der Debye-Länge. Die Bedingung $N_D \gg 1$ ist in weiten Teilen erfüllt.

2.2.3 Die Plasmafrequenz

Nachdem wir festgestellt haben, daß im elektrostatischen Fall nur innerhalb einer Kugel vom Radius der Debye-Länge Abweichungen von der Quasineutralität möglich sind, wollen wir uns nun mit *dynamischer* Abschirmung beschäftigen. Wegen der kleineren Masse der Elektronen sind diese beweglicher als die Ionen. Wir fragen uns also, bis zu welchen Frequenzen Elektronen praktisch instantan Abweichungen von der Quasineutralität abschirmen. Dazu betrachten wir eine Auslenkung der Elektronen gegen den Hintergrund der Ionen. Nach Gl. (2.18) ist damit eine rücktreibende Kraft der Größe eE verbunden. Also gilt

$$m_e \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{e^2 n_e}{\epsilon_0} x \quad (2.27)$$

Dies ist die Gleichung eines harmonischen Oszillators mit Eigenfrequenz

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0}} = 56.4 (n_e [\text{m}^{-3}])^{1/2} \text{s}^{-1} \quad \text{oder} \quad \nu = 8.97 \sqrt{n_e [\text{m}^{-3}]} \text{ Hz} \quad (2.28)$$

Damit ist ω_p die natürliche Frequenz, mit der die Elektronen gegen die Ionen schwingen

können. So können z.B. im Metall kollektive Schwingungen der Elektronen bei ω_p angeregt werden (sog. *Plasmonen*). Fig. 2.6 zeigt typische Größenordnungen von ω_p im Bereich der uns interessierenden Plasmen.

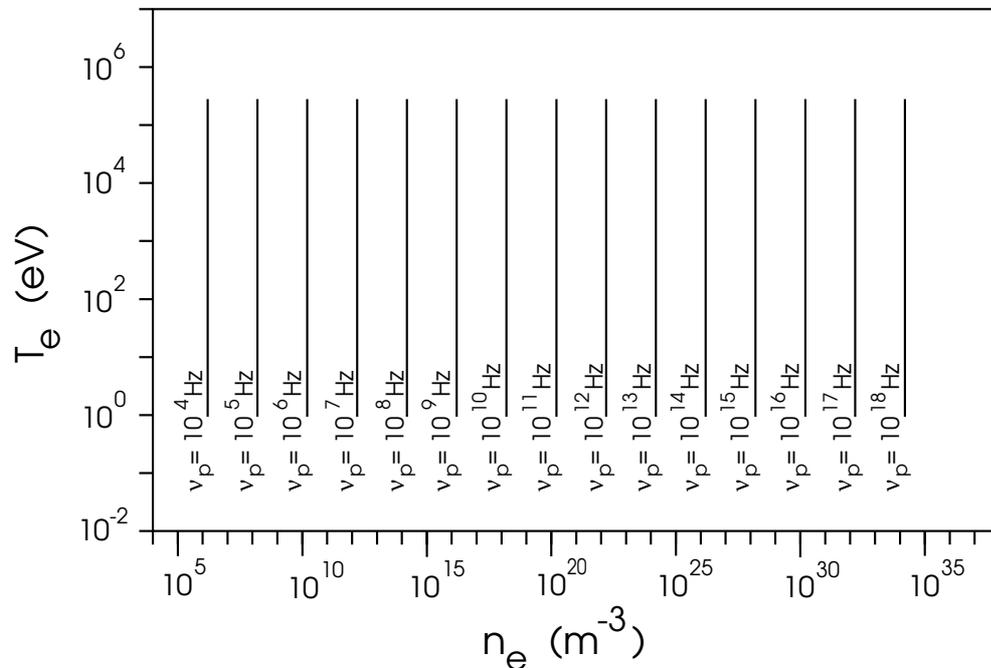


Abbildung 2.6: Plasmafrequenz $\nu_p = \omega_p/(2\pi)$ der Elektronen im $n - T$ Diagramm.

Die Dynamik der Abschirmung kann nun analog zum getriebenen harmonischen Oszillator betrachtet werden: Unterhalb der Eigenfrequenz ω_p folgen die Elektronen einer Störung praktisch instantan und schirmen vollständig ab; oberhalb ω_p können die Elektronen der Störung nicht folgen. Für Phänomene, die auf einer kürzeren Zeitskala als $1/\omega_p$ ablaufen, liegt keine Abschirmung vor. Dies ist von praktischer Bedeutung für das Eindringen elektrischer Felder: Unterhalb ω_p können elektromagnetische Wellen nicht in ein Plasma eindringen (sogenannter 'cut-off') und werden reflektiert; oberhalb ω_p wird ein Plasma transparent für elektromagnetische Strahlung. Ein bekanntes Beispiel ist die Reflexion von Licht am Elektronenplasma eines Metalls: Nach Gl. (2.28) liegt bei Festkörperdichten von $10^{28} m^{-3}$ die Plasmafrequenz im Bereich einiger 10^{15} Hz . Damit wird sichtbares Licht gerade noch reflektiert, während UV-Strahlung durchgelassen wird. Eine Messung der Transparenz in Abhängigkeit von der Wellenlänge kann somit Aufschluß über die Lage der Plasmafrequenz ('Plasmakante' in der Reflexion) und damit die Zahl der freien Ladungsträger im Metall geben.

Ein weiteres Beispiel ist die schon erwähnte Reflexion von Radiowellen an der Ionosphäre: Hier beträgt die Dichte $\approx 10^9 - 10^{10} m^{-3}$, und die Plasmafrequenz liegt somit im Bereich von einigen MHz, so daß Radiowellen im Bereich der 'Mittelwelle' ($\approx \text{MHz}$) zur Erde zurück reflektiert werden, während die Ionosphäre für Ultrakurzwellen ($\approx 100 \text{ MHz}$) durchlässig ist.

Daraus erklärt sich u.a. die unterschiedliche Reichweite der Radiosender im MW- und UKW-Bereich.

Analog zur Plasmafrequenz der Elektronen definiert man die Ionenplasmafrequenz ω_i ; sie ist um einen Faktor $\sqrt{m_i/m_e}$ kleiner als ω_p und somit für die Abschirmung nicht von Bedeutung.

2.3 Plasmapotential

Wir haben bereits gesehen, daß ein Plasma auf Größenordnungen $\gg \lambda_D$ quasineutral erscheint. In erster Näherung gehen wir daher davon aus, daß das elektrische Potential im Inneren eines homogenen Plasmas konstant ist und bezüglich eines beliebigen, aber festen Referenzpotentials (z.B. Erdpotential) den Wert Φ_p hat (*Plasmapotential*). Generell ist der Wert von Φ_p nur als Differenz zu einem Bezugspunkt von Bedeutung, da nur $E = -\nabla\Phi$ in die Bewegungsgleichung der Teilchen eingeht. Wir werden uns im Weiteren mit den Potentialverhältnissen einer Plasmaentladung beschäftigen und dabei eine Methode kennenlernen, T_e und n_e in der Nähe der Wand zu bestimmen.

2.3.1 Plasma-Wand Grenzschichten

Wie können wir Φ_p in einer Gasentladung messen? Die einfachste Messung ist die Bestimmung des Potentials an der Wand des Entladungsgefäßes. Es zeigt sich jedoch, daß diese Messung *nicht* Φ_p direkt bestimmt. Dazu betrachten wir beispielhaft die zwei in Fig. 2.7 dargestellten Fälle:

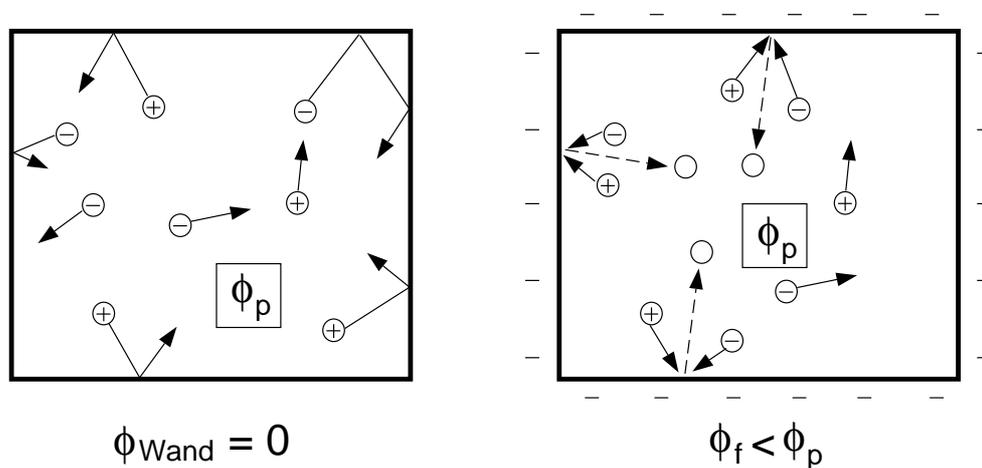


Abbildung 2.7: Plasma-Wand Grenzschichten: a) ideal reflektierend b) vollständige Wandrekombination

Ideal reflektierende Wand

Dieser Fall ist in der Praxis kaum von Bedeutung, eignet sich jedoch, um in einem Gedankenexperiment einen Überblick über die auftretenden Teilchenflüsse zu bekommen. Bei ideal reflektierender Wand wird der gesamte Teilchenfluß $\Gamma = n_e v_e + n_i v_i$ ohne Wechselwirkung reflektiert; wir können keine Aussage über Φ_p machen. Wir bestimmen die Teilchenflüsse aus der Boltzmannverteilung Gl. 2.20: Für $\Phi - \Phi_p = 0$ liegt die *Maxwellverteilung* vor, d.h. für die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen im Geschwindigkeitsintervall $[\mathbf{v}, \mathbf{v} + d\mathbf{v}]$ anzutreffen, gilt

$$dW = f(v)d^3v = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} d^3v \quad (2.29)$$

wobei $f(v)$ hier bereits korrekt normiert ist ($\int f(v)d^3v = 1$). Die mittlere Geschwindigkeit eines Teilchens beträgt

$$\langle v \rangle = \int |v| f(v)d^3v = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^\infty e^{-\frac{mv^2}{2kT}} 4\pi v^3 dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \quad (2.30)$$

Der Fluß zur Wand berechnet sich für jede der 6 Wände als Integral über eine Komponente in eine Richtung, z.B. für die positive x -Richtung

$$\Gamma = n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \int_0^\infty v_x e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x = \frac{n \langle v \rangle}{4} \quad (2.31)$$

Der Fluß zur Wand ist somit proportional zur mittleren Geschwindigkeit und es gilt im ideal reflektierenden Fall $\Gamma_e = \sqrt{m_i/m_e} \Gamma_i$.

Vollständige Wandrekombination

Im zweiten Grenzfall rekombinieren *alle* auf der Wand auftreffenden geladenen Teilchen zu Neutralen. Dieser Fall ist im Labor praktisch immer gegeben (in der Praxis ist die Zahl der rekombinierenden Teilchen größer 99 %). Für Stationarität benötigt man dann Energie- und Teilchenquellen. Letztere kann z.B. durch *Recycling*, d.h. Wiedereindringen der Neutralen mit anschließender Stoßionisation, gegeben sein. Nach obigen Abschätzungen ist der Fluß von Elektronen im potentialfreien Fall um $\sqrt{m_i/m_e}$ größer als der der Ionen, d.h. es würde sich ein elektrischer Strom zur Wand ausbilden. Nach der Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.32)$$

müßte dieser Strom schnell zu einer Verletzung der Quasineutralität führen. Dieser Prozeß tritt somit *nicht* auf; vielmehr lädt sich die Wand negativ gegen das Plasma auf. Die räumliche Ausdehnung der Raumladungszone kann nach unseren Betrachtungen zur Abschirmung nur von der Größenordnung λ_D sein, man spricht daher auch von der *Debye-Schicht*. In dieser

Schicht werden die Elektronen abgebremst, während die Ionen beschleunigt werden. Der Wert des Potential an der Wand, das sogenannte *Floatingpotential* Φ_f (Potential eines isolierten Körpers im Plasma) wird festgelegt durch die Forderung $\Gamma_e = \Gamma_i$, d.h. kein Nettostrom zur Wand.

Wir können die Ströme für diesen Fall berechnen: Die Ionen werden in der Debyeschicht bis zur maximal möglichen Geschwindigkeit beschleunigt (sog. Bohm-Kriterium); diese ist die Ionenschallgeschwindigkeit

$$\Gamma_i = n_i c_i = n_i \sqrt{\gamma \frac{kT_i + kT_e}{m_i}} \quad (2.33)$$

wobei γ der Adiabatenkoeffizient ist. Für die Elektronen wiederholen wir die Integration über die Maxwellverteilung, berücksichtigen aber, daß die Gesamtenergie jetzt durch $(m/2)v_e^2 + e(\Phi_p - \Phi_f)$ gegeben ist:

$$\Gamma_e = n_e \left(\frac{m_e}{2\pi kT_e} \right)^{1/2} e^{-e \frac{\Phi_p - \Phi_f}{kT_e}} \int_0^\infty v_{e,x} e^{-\frac{m_e v_{e,x}^2}{2kT_e}} dv_{e,x} = n_e \frac{\langle v_e \rangle}{4} e^{-e \frac{\Phi_p - \Phi_f}{kT_e}} \quad (2.34)$$

Gleichsetzen von Gl. (2.33) und (2.34) ergibt unter Verwendung der Quasineutralitätsbedingung im Plasma $n_e = n_i$ die Bestimmungsgleichung für die Potentialdifferenz

$$\Phi_p - \Phi_f = -\frac{kT_e}{2e} \ln \left(2\pi\gamma \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \right) \frac{m_e}{m_i} \right) \quad (2.35)$$

Für $T_e = T_i$ und $\gamma = 5/3$ sowie $m_i = 1836m_e$ (Wasserstoff) ergibt sich $\Phi_p - \Phi_f = 2.2kT_e/e$, d.h. das Floatingpotential ist tatsächlich gegenüber dem Plasmapotential abgesenkt. In der Praxis gilt wegen der schwachen Veränderlichkeit des Logarithmus praktisch immer $\Phi_p - \Phi_f \approx 2 - 3kT_e/e$.

2.3.2 Die Langmuirsonde

Wir hatten gesehen, daß sich die Wand eines Entladungsgefäßes gegenüber dem Plasma in der Regel auf $\approx 2 - 3kT_e/e$ negativ auflädt. Da wir aber Φ_p nicht kennen und Φ_f immer nur relativ zum Erdpotential messen können, kann T_e nicht direkt aus der Messung von Φ_f gewonnen werden. Dazu bringt man einen kleinen, von der Umgebung isolierten Leiter ins Plasma und variiert die Spannung Φ_{ext} zwischen diesem und der Wand. Diese Anordnung bezeichnet man als *Langmuirsonde*. Diese kann z.B. aus einem kleinen Wolframzylinder, umgeben von einer Keramikisolation, bestehen. Fig. 2.8 skizziert die Meßanordnung.

Variiert man Φ_{ext} und mißt den Sondenstrom I , so erhält man die sogenannte *Langmuir-Kennlinie* (siehe Fig. 2.8):

$$I = A_s e n_e \left(c_i - \frac{\langle v_e \rangle}{4} e^{-e \frac{\Phi_p - \Phi_{ext}}{kT_e}} \right) \quad (2.36)$$

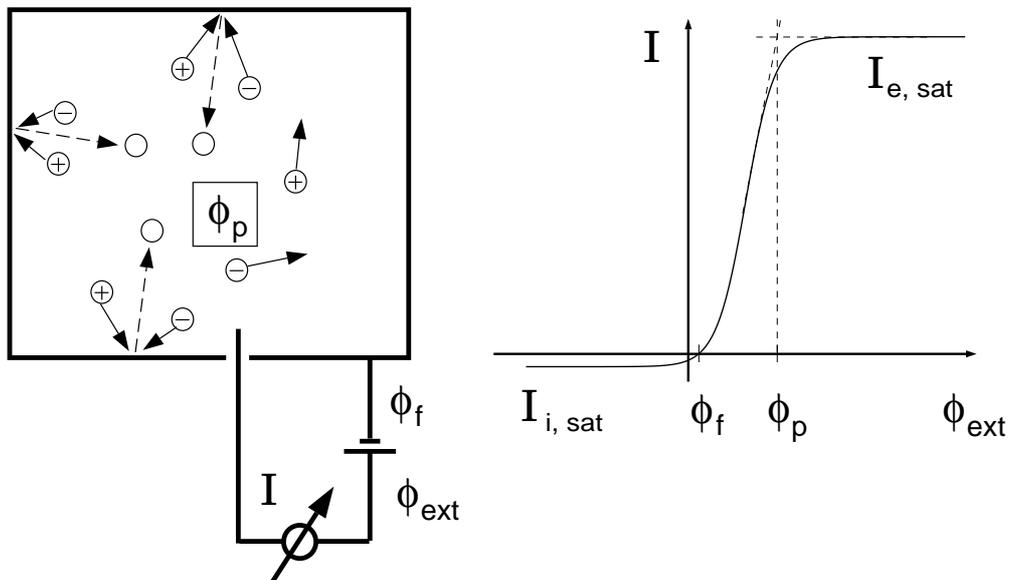


Abbildung 2.8: Schema einer Langmuirsonde und Kennlinie $I(\Phi_{ext})$.

wobei A_s die Sondenoberfläche ist. Wir haben angenommen, daß sie klein gegen die Wandfläche ist, d.h. der Rückstrom Φ_f nicht verändert. Für $\Phi_{ext} \ll \Phi_f$ kommen praktisch keine Elektronen mehr zur Sonde; man mißt den Ionensättigungsstrom $I_{sat,i} = A_s n_e c_i$. Bei $\Phi_{ext} (I = 0)$ hat man das Floatingpotential bestimmt, bis zu $\Phi_{ext} = \Phi_p$ steigt der Strom exponentiell mit der Spannung an; aus der Steigung der Auftragung $\ln I$ gegen Φ_{ext} erhält man somit $1/(kT_e)$. Oberhalb von Φ_p werden schließlich die Elektronen bis zur Schallgeschwindigkeit beschleunigt; man erhält für $\Phi_{ext} \gg \Phi_p$ den Elektronensättigungsstrom $I_{sat,e} = \sqrt{m_i/m_e} I_{sat,i}$. Die Aufnahme einer solchen Kennlinie liefert uns also T_e und damit, aus dem Sättigungsstrom, auch n_e . Prinzipiell kann auch Φ_p bestimmt werden; für $\Phi_{ext} > \Phi_p$ weicht die Kennlinie vom exponentiellen Verlauf ab, d.h. die logarithmierte Auftragung zeigt einen Knick.

In der Praxis limitiert der Leistungsfluß zur Sonde (durch Aufheizung) sowie eventuell die Erosion der Sonde durch Plasmateilchen den Einsatzbereich von Langmuirsonden. In heutigen Fusionsexperimenten können sie z.B. nur zur Bestimmung von T_e und n_e in der relativ kalten Randschicht eingesetzt werden

Kapitel 3

Stoßprozesse

3.1 Elastische und inelastische Stöße

In einem Plasma finden ständig unterschiedliche Stoßprozesse statt. In jedem Stoß von Teilchen sind Impuls und Energie erhalten:

$$\sum_{\ell} m_{\ell} \mathbf{v}_{\ell} = \sum_{\ell} m'_{\ell} \mathbf{v}'_{\ell} \quad (3.1)$$

$$\sum_{\ell} (E_{\ell,kin} + E_{\ell,in}) = \sum_{\ell} (E'_{\ell,kin} + E'_{\ell,in}) \quad (3.2)$$

Hierbei ist über alle am Stoß beteiligten Teilchen ℓ zu summieren. Die gestrichelten Größen geben die Werte nach dem Stoß an. Die Energie wurde in kinetische Energie E_{kin} und innere Energie E_{in} aufgespalten. Ist die innere Energie der Teilchen erhalten, so spricht man von einem *elastischen Stoß*, bei Änderung der inneren Energie mindestens eines der Partner liegt der *inelastische Stoß* vor. Ein Beispiel für einen inelastischen Stoß ist die Anregung eines Atoms durch Elektronenstoß; hier wird kinetische Energie des stossenden freien Elektrons in innere Energie des Atoms umgewandelt. Auf die inelastischen Stöße werden wir ausführlich im nächsten Kapitel eingehen.

Ein Beispiel für einen elastischen Stoß ist die Coulombstreuung geladener Teilchen. Dabei werden Stöße zwischen gleichen Teilchen, aber auch solche zwischen Elektronen und Ionen auftreten. In diesen Fällen ergeben sich unterschiedliche Impuls- und Energieüberträge. Am einfachsten macht man sich diese Verhältnisse am zentralen Stoß klar. Hier bewegen sich beide Teilchen längs einer Koordinate und der Vektorcharakter des Impulses muß nicht berücksichtigt werden. In einem System, in dem Teilchen 1 vor dem Stoß ruht, gilt für den Impuls- bzw. Energieübertrag von Teilchen 2 auf Teilchen 1

$$p'_1 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} p_2 \quad (3.3)$$

$$E'_1 = \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}E_2 \quad (3.4)$$

Für festes p_2, m_2 wird somit der maximale Impulsübertrag von Teilchen 2 auf Teilchen 1 erreicht, wenn $m_1 \rightarrow \infty$. Dann gilt $p'_1 = 2p_2$. Dies entspricht einer vollständigen Reflexion, wie sie z.B. beim Stoß von Elektronen an Ionen näherungsweise vorliegt. Andererseits wird bei vertauschten Rollen ($m_1 \rightarrow 0$) praktisch kein Impuls übertragen. In beiden Fällen ist der Energieübertrag gering; er hat für $m_1 = m_2$ ein Maximum; in diesem Fall ist der Impulsübertrag gerade p_2 . Wir werden auf diese Fälle zurückkommen, wenn wir die verschiedenen Relaxationszeiten zwischen Elektronen und Ionen diskutieren.

3.2 Reibungskraft durch Coulombstöße

Da ein Plasma aus geladenen Teilchen besteht, werden auf Grund der thermischen Bewegung ständig Coulombstöße zwischen den Teilchen stattfinden. Betrachten wir zunächst den Stoß eines sehr schweren, ruhenden Teilchens 1 mit einem Teilchenstrom $\Gamma_2 = n_2v_2$ von leichten Teilchen 2. Der Teilchenstrom sei senkrecht zur Einfallsgeschwindigkeit von homogener Dichte und unendlich ausgedehnt; dann treten bezüglich Teilchen 1 alle möglichen Stoßparameter b (Abstand zwischen einer Geraden parallel zur Einfallsrichtung und dem Streuzentrum) auf. Fig. 3.1 verdeutlicht die Geometrie:

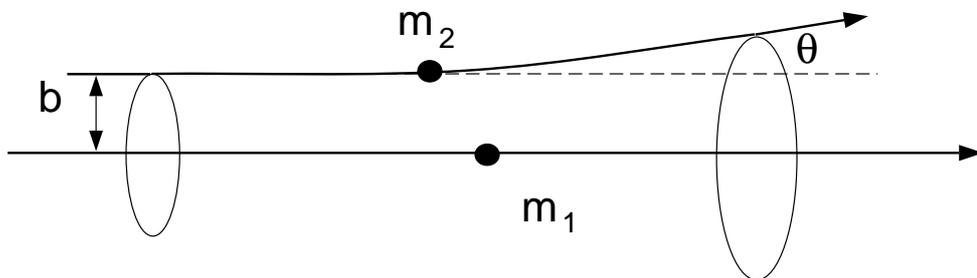


Abbildung 3.1: Geometrische Verhältnisse bei der Coulombstreuung.

Wir fragen nun nach der Kraft, die dabei auf das ruhende Teilchen übertragen wird. Sie ist nach *actio = reactio* gleich der gesamten Impulsänderung der einströmenden Teilchen bei der Streuung. Diese berechnet sich zu

$$F_1 = \frac{dp_1}{dt} = \int m_2 \delta v_2 \frac{d\dot{N}_2(\delta v_2)}{d\delta v_2} d\delta v_2 \quad (3.5)$$

wobei $d\dot{N}_2/d\delta v_2$ die Anzahl der pro Zeiteinheit gestreuten Teilchen mit Impulsübertrag $m_2\delta v_2$ ist. Die Geschwindigkeitsänderung δv_2 können wir der Figur 3.2 entnehmen:

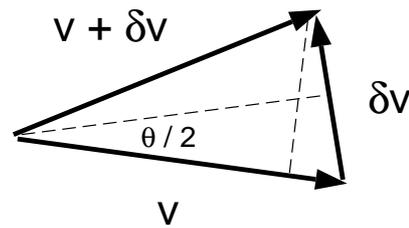


Abbildung 3.2: Zur Berechnung der Änderung des Parallelimpulses bei der elastischen Streuung.

Da es sich um einen elastischen Stoß handelt, bleibt der Betrag der Geschwindigkeit erhalten, das Dreieck ist somit gleichschenkelig. Die Geschwindigkeitsänderung ist dann $|\delta \mathbf{v}| = 2|\mathbf{v}| \sin(\theta/2)$ wobei θ der Streuwinkel ist. Wir interessieren uns hier nur für den Impulsübergang in Richtung des einfallenden Strahls; d.h. wir projizieren $\delta \mathbf{v}$ auf \mathbf{v} und erhalten schließlich

$$\delta v_2 = -2v_2 \sin^2(\theta/2) \quad (3.6)$$

Wir haben damit δv_2 als Funktion des Streuwinkels θ und der Einfallsgeschwindigkeit v_2 ausgedrückt.

Aus der Atomphysik kennen wir bereits das Konzept des Wirkungsquerschnitts σ , das besagt, daß pro Zeiteinheit $\Gamma_2 \sigma$ Teilchen des einfallenden Strahls am ruhenden Teilchen gestreut werden. Daher kann $d\dot{N}/d\delta v_2$ durch $\Gamma_2 d\sigma/d\Omega$ ersetzt werden. $d\sigma/d\Omega$ ist dabei der differentielle Wirkungsquerschnitt für Streuung in den Raumwinkel $d\Omega$. Für die Coulombstreuung ist dieser gerade durch die aus der Atomphysik bekannte Rutherfordformel gegeben:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{q_1 q_2}{8\pi\epsilon_0 m_2 v_2^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad (3.7)$$

Wegen der Zylindersymmetrie des Problems hängt σ nur von θ ab und es existiert ein eindeutiger Zusammenhang zwischen dem Stoßparameter b und dem Streuwinkel θ :

$$b = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 m_2 v_2^2} \cot(\theta/2) \quad (3.8)$$

Wir können jetzt das Integral aus Gl. (3.5) berechnen:

$$\frac{dp_1}{dt} = -2v_2 \Gamma_2 m_2 \left(\frac{q_1 q_2}{8\pi\epsilon_0 m_2 v_2^2} \right)^2 \int_{\theta_{min}}^{\pi} \frac{\sin^2(\theta/2)}{\sin^4(\theta/2)} 2\pi \sin\theta d\theta \quad (3.9)$$

Mit $\sin\theta = 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)$ und $\Gamma_2 = n_2 v_2$ ergibt sich

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{q_1^2 q_2^2 n_2}{4\pi\epsilon_0^2 m_2 v_2^2} \int_{\theta_{min}}^{\pi} \frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} d(\theta/2) = -\frac{q_1^2 q_2^2 n_2}{4\pi\epsilon_0^2 m_2 v_2^2} \ln\left(\frac{1}{\sin(\theta_{min}/2)}\right) \quad (3.10)$$

Hier tritt ein Problem auf: Für $\theta_{min} = 0$ divergiert der Ausdruck. Solche Stöße sind allerdings im Plasma gar nicht möglich. Sie entsprechen nämlich dem Vorbeiflug des Teilchens 2 in sehr weiten Entfernungen (Stoßparameter $b \rightarrow \infty$). Da wir es mit einem quasineutralen Plasma zu tun haben, ist das Coulombpotential für Stoßparameter, welche größer als λ_D sind, abgeschirmt. Wir setzen daher in erster Näherung an, daß nur Stoßparameter $b \leq \lambda_D$ vorkommen. Mit Gl. (3.8) können wir dies in eine untere Grenze für θ umformen:

$$\cot(\theta/2) \leq \frac{4\pi\epsilon_0 m_2 v_2^2}{q_1 q_2} \lambda_D = \frac{\lambda_D}{b_{90}} \quad (3.11)$$

wobei wir den Vorfaktor durch b_{90} , den Stoßparameter für einen 90° Stoß ausgedrückt haben. Damit ergibt sich im Ausdruck (3.10) der Faktor

$$\ln\left(\frac{1}{\sin(\theta_{min}/2)}\right) = \ln\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda_D}{b_{90}}\right)^2} \quad (3.12)$$

Im thermischen Plasma gilt für die mittlere kinetische Energie $(m/2)v^2 = (3/2)kT$ und wir erhalten aus der Bedingung für das ideale Plasma mit $q_1 = -q_2 = e$ (Wasserstoffplasma) die folgende Abschätzung

$$kT \gg \frac{e^2 n^{1/3}}{4\pi\epsilon_0} \Rightarrow (kT)^{3/2} \gg \frac{e^3 \sqrt{n}}{(4\pi\epsilon_0)^{3/2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{\epsilon_0 kT}{ne^2}} \gg \frac{e^2}{(4\pi)^{3/2} \epsilon_0 kT} \Rightarrow \lambda_D \gg b_{90} \quad (3.13)$$

Somit gibt es nur wenige Teilchen innerhalb der Debyekugel, deren Stoßparameter so klein ist, daß es zu einem 90° Stoß kommt. Vielmehr wird eine Ablenkung um 90° durch den Effekt vieler Kleinwinkelstöße bewirkt. Mit obiger Abschätzung können wir im Ausdruck (3.12) die 1 gegen $(\lambda_D/b_{90})^2$ vernachlässigen und erhalten schließlich

$$F_1 = \frac{dp_1}{dt} = -\frac{q_1^2 q_2^2 n_2}{4\pi\epsilon_0^2 m_2 v_2^2} \ln \Lambda \quad (3.14)$$

wobei wir den *Coulomb-Logarithmus* $\ln \Lambda = \ln(\lambda_D/b_{90})$ eingeführt haben. Für Fusionsplasmen gilt $\ln \Lambda \approx 15 - 20$, in Übereinstimmung mit der oben abgeleiteten Dominanz der Kleinwinkelstöße.

Gleichung (3.14) beschreibt die auf ein ruhendes Teilchen großer Masse ausgeübte Reibungskraft im Teilchenstrom. Eine genauere Ableitung verwendet das abgeschirmte Potential zur Berechnung des Stoßquerschnittes. Dann erhält man quantenmechanische Korrekturen zum Coulomb-Logarithmus: es zeigt sich jedoch, daß diese in den von uns behandelten Plasmen keine große Rolle spielen.

3.3 Stoßzeiten und freie Weglängen

Im vorhergehenden Kapitel wurde die Kraft, welche ein Strom leichter Teilchen auf ein ruhendes, schweres Teilchen ausübt, berechnet. Im allgemeinen Fall werden Teilchen 1 und 2 ein endliches Massenverhältnis und unterschiedliche Geschwindigkeiten besitzen. Analog zum Keplerproblem kann man die Bewegungsgleichung in Schwerpunkts- und Relativbewegung trennen. Da die Schwerpunktsbewegung eine Stoßinvariante ist, hat man nur die Relativbewegung zu betrachten. Dies bedeutet, daß die Geschwindigkeit v_2 durch die Relativgeschwindigkeit u und die Masse m_2 durch die reduzierte Masse m_r ersetzt werden muß

$$F_1 = \frac{q_1^2 q_2^2 \ln \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 m_r} \frac{n_2}{u^2} \quad (3.15)$$

mit

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \quad (3.16)$$

$$m_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (3.17)$$

Wegen der starken Abnahme des Rutherfordquerschnittes mit u nimmt die effektive Reibungskraft also mit $1/u^2$ ab.

Die charakteristische Zeit, mit der ein Anfangsimpuls p durch Stöße abgebaut wird (Abbremszeit von Teilchen 1 an Teilchen 2), ergibt sich somit zu

$$\tau_{12} = \frac{p_1}{dp_1/dt} = \frac{m_1 u}{F_1} = \frac{4\pi \epsilon_0^2 m_1 m_r u^3}{q_1^2 q_2^2 \ln \Lambda n_2} \quad (3.18)$$

Mit diesen Vorüberlegungen können wir nun die Abbremszeiten im thermischen Plasma berechnen. Wir betrachten zunächst den Stoß von Elektronen untereinander. Dann gilt $m_r = m_e/2$ und $m_1 = m_e$. Betrachten wir einen Fall, in dem keine von außen aufgeprägte Geschwindigkeit vorliegt, so können wir in erster Näherung für die Geschwindigkeit der Elektronen die thermische Geschwindigkeit $u = v_{th,e} = \sqrt{3kT_e/m_e}$ ansetzen. Also gilt für die Abbremszeit

$$\tau_{ee} = \frac{2\pi 3^{3/2} \epsilon_0^2 \sqrt{m_e} (kT_e)^{3/2}}{e^4 \ln \Lambda n_e} \quad (3.19)$$

Eine analoge Ableitung für den Impulsaustausch der Ionen untereinander ergibt (hier und im folgenden wird Wasserstoff, d.h. $Z = 1$ und Quasineutralität $n_e = n_i$ vorausgesetzt)

$$\tau_{ii} = \tau_{ee} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \left(\frac{T_i}{T_e} \right)^{3/2} \quad (3.20)$$

Der Impulsaustausch der Ionen untereinander ist also für gleiche Temperaturen um die Wurzel aus dem Massenverhältnis langsamer; dies spiegelt die um diesen Faktor niedrigere Relativgeschwindigkeit wieder.

Für $T_e = T_i = T$ können wir auch den Impulsaustausch der Elektronen mit den Ionen untersuchen: Die Relativgeschwindigkeit ist wegen des oben angesprochenen Faktors im wesentlichen durch die thermische Geschwindigkeit der Elektronen gegeben; die reduzierte Masse kann wegen des großen Unterschieds gut durch $m_r \approx m_e$ genähert werden. Wir erhalten also

$$\tau_{ei} \approx \tau_{ee} \quad (3.21)$$

Dies liegt daran, daß der Impulsübertrag der Elektronen untereinander vergleichbar effizient dem von Elektronen mit Ionen ist. Dies hatten wir bereits an Hand von Gl. (3.4) festgestellt. Gänzlich anders ist die Situation beim Impulsübertrag von Ionen auf Elektronen. Hier erhalten wir aus (3.18) mit $u = v_{th,e}$, $m_r = m_e$ und $m_1 = m_i$

$$\tau_{ie} = \frac{m_i}{m_e} \tau_{ee} \quad (3.22)$$

Es besteht also eine Asymmetrie zwischen der Abbremszeit der Elektronen an Ionen, τ_{ei} und der der Ionen an den Elektronen τ_{ie} . Man beachte, daß τ_{12} *nicht* die Zeit zwischen zwei Stößen ist, sondern die Zeit, in der durch den Effekt vieler Stöße ein Anfangsimpuls abgebaut wird. Für die gleiche Zahl von Elektronen-Ionenstößen pro Zeiteinheit verlieren die Ionen laut Gl. (3.4) um einen Faktor m_e/m_i weniger Impuls, d.h. zum Abbau eines Anfangsimpulses werden um diesen Faktor mehr Stöße benötigt. Diese Asymmetrie tritt beim Übergang von der Kraftgleichung (3.15) zur Abbremszeit (3.18) auf: der Ausdruck für die übertragene Kraft enthält nur m_r und ist somit, im Einklang mit *actio = reactio*, symmetrisch in m_1 und m_2 .

Eine genauere Behandlung thermischer Plasmen berücksichtigt die Maxwellverteilung der Elektronen- und Ionengeschwindigkeiten. Dann treten an Stelle von $u = v_{th}$ entsprechende Integrale über die Verteilungsfunktion auf. Man findet so andere Zahlenfaktoren vor den Stoßzeiten. Der korrekte Ausdruck für τ_{ee} lautet dann (für $T_e = T_i = T$)

$$\tau_{ee} = \frac{3\sqrt{m_e}(4\pi\epsilon_0)^2 (kT)^{3/2}}{4\sqrt{\pi}e^4 \ln \Lambda n_e} \Rightarrow \tau_{ee}[\text{s}] = 2.9 \times 10^{10} \frac{(T[\text{eV}])^{3/2}}{n[\text{m}^{-3}]} \quad (3.23)$$

wobei wir für $\ln \Lambda$ einen typischen Wert von 17 angenommen haben. Für ein Fusionsplasma mit $T = 10$ keV und $n = 10^{20} \text{ m}^{-3}$ ergibt sich z.B. $\tau_{ee} \approx 300 \mu\text{s}$. Die Relationen zwischen den unterschiedlichen Stoßzeiten bleiben erhalten, und so können τ_{ii} , τ_{ei} und τ_{ie} mit Hilfe von Gl. (3.20) - (3.22) aus Gl. (3.23) berechnet werden.

Analoge Überlegungen lassen sich für den Energieaustausch anstellen. Die Zeiten τ_{ee}^E , τ_{ii}^E , τ_{ie}^E sind von ähnlicher Größenordnung wie die Impulsaustauschzeiten und es gilt

$$\tau_{ee}^E : \tau_{ii}^E : \tau_{ie}^E = 1 : \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \left(\frac{T_i}{T_e}\right)^{3/2} : \frac{m_i}{m_e} \quad (3.24)$$

Beim Energieaustausch ist nach Gl. (3.4) der Übertrag für $m_1/m_2 \neq 1$ klein und symmetrisch bezüglich Vertauschung von m_1 und m_2 . Somit gilt $\tau_{ei} = \tau_{ie}$. Diese Zeiten beschreiben die Relaxation eines Plasmas ins thermodynamische Gleichgewicht: Nach einer Anfangsstörung

werden zuerst die Elektronen, dann die Ionen zur Maxwellverteilung zurückkehren. Gleiche Temperaturen $T_e = T_i$ stellen sich mit einer vergleichsweise langen Zeitkonstante ein.

Die Energieaustauschzeit zwischen Ionen und Elektronen kann durchaus länger als typische experimentelle Zeitskalen sein; so gilt z.B. in speziellen Tokamak-Entladungen mit hoher Iontemperatur und niedriger Dichte $T_i > T_e$ während der gesamten Entladungsdauer (sog. 'Supershots'). Dies erklärt sich mit Gl. (3.23): Mit $T \approx 40$ keV und $n_e = 3 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$ ist $\tau_{ei} \approx 14$ s und damit größer als die typische Entladungsdauer von ca. 1-5 s.

An Stelle der Stoßzeiten kann man die Häufigkeit der Stöße auch im Konzept der *freien Weglänge* λ deuten: Bei einer mittleren Geschwindigkeit von v_{th} legt ein Teilchen im Mittel zwischen zwei Stößen die Strecke

$$\lambda = v_{th}\tau \quad (3.25)$$

zurück. Wir hatten bereits bemerkt, daß für Elektronen die Zeiten τ_{ee} und τ_{ei} von gleicher Größenordnung sind. Für Ionen ist wegen $\tau_{ii} \gg \tau_{ie}$ vor allem der Stoß untereinander von Bedeutung. Wir erhalten so

$$\lambda_e \approx v_{th,e} \tau_{ee} = \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} v_{th,i} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \tau_{ii} = \lambda_i \quad (3.26)$$

d.h. die freie Weglänge der Ionen und Elektronen ist im thermischen Plasma mit $T_e = T_i$ näherungsweise gleich. Einsetzen von (3.23) liefert

$$\lambda[\text{m}] \approx 2 \times 10^{16} \frac{(T[\text{eV}])^2}{n[\text{m}^{-3}]} \quad (3.27)$$

Fig. 3.3 zeigt typische Größenordnungen der freien Weglänge.

Wie man sieht, kann λ sehr große Werte annehmen. So ergibt sich z.B. für ein Fusionsplasma mit $T = 10$ keV und $n = 10^{20} \text{ m}^{-3}$ eine freie Weglänge von $\lambda \approx 20$ km! In einem typischen magnetischen Fusionsexperiment, in dem Teilchen durch Magnetfeldlinien in einem Torus vom Umfang ≈ 10 m gefangen sind, vollführt ein Teilchen daher im Mittel 2000 Umläufe, bevor es um 90° gestreut wird. Dies führt zur außerordentlich hohen Leitfähigkeit für Wärme wie auch elektrischen Strom längs der Feldlinien. Mit diesen Aspekten werden wir uns im nächsten Abschnitt beschäftigen.

3.4 Leitfähigkeit von Plasmen

In diesem Abschnitt wollen wir einen Überblick über die Transporteigenschaften des Plasmas gewinnen. Wir betrachten hier den Fall ohne Magnetfeld; da aber das Magnetfeld nur die Teilchenbewegung senkrecht zum Feld beeinflusst (Gyration), werden wir für den Transport längs der Feldlinien dasselbe Resultat wie im feldfreien Fall erhalten.

Allgemein gilt, daß in einem Gas oder Plasma der Transport von Gradienten getrieben wird. Diese entsprechen Kräften, welche zu einer gerichteten Teilchenbewegung führen. Die gerich-

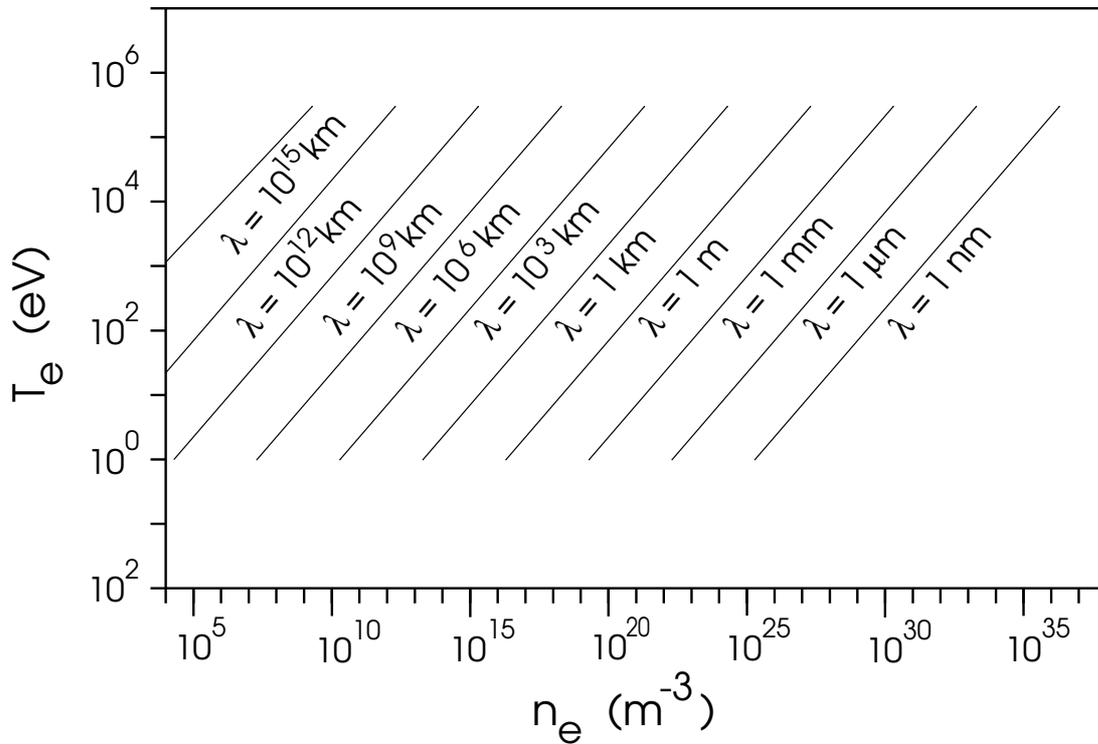


Abbildung 3.3: Freie Weglänge im thermischen Plasma im $n - T$ Diagramm.

tete Bewegung besteht mikroskopisch aus der Beschleunigung der Teilchen durch die Kraft F und die Abbremsung durch Stoß mit anderen Teilchen. Makroskopisch läßt sich dies durch eine mittlere Driftgeschwindigkeit \mathbf{v}_D beschreiben, welche der thermischen Bewegung mit Mittelwert $\langle \mathbf{v}_{th} \rangle = 0$ überlagert ist. Für \mathbf{v}_D gilt, daß im Mittel die Beschleunigung und der Impulsverlust durch Stöße gleich sind, d.h.

$$\frac{1}{\tau} m \mathbf{v}_D = \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{v}_D = \frac{\tau}{m} \mathbf{F} \quad (3.28)$$

Der Strom einer Größe Q ist gegeben durch das Produkt aus Teilchenstrom $\Gamma = n v$ und der pro Teilchen transportierten Größe q

$$q \Gamma = \frac{q n}{m} \tau F \quad (3.29)$$

d.h. die verallgemeinerte Leitfähigkeit χ ist durch

$$\chi = \frac{q n}{m} \tau \quad (3.30)$$

gegeben. Mit diesen Vorüberlegungen wollen wir jetzt den Transport von Ladung und Wärme untersuchen.

3.4.1 Elektrische Leitfähigkeit

Im Falle der elektrischen Leitfähigkeit ist der Strom $q\Gamma$ mit dem elektrischen Strom $\mathbf{j} = -en_e\mathbf{v}_{D,e}$ gleichzusetzen. Wir haben hier angenommen, daß der Strom hauptsächlich von den Elektronen getragen wird, während die Ionen auf Grund ihrer wesentlich größeren Masse ruhen. Die Kraft F entsteht in diesem Fall durch den Gradienten des elektrischen Potentials $eE = -e\nabla\Phi$. Einsetzen in Gl. (3.29) ergibt

$$\mathbf{j} = -en_e\mathbf{v}_{D,e} = -\frac{en_e}{m_e}\tau(e\mathbf{E}) \quad (3.31)$$

Mit der Definition der elektrischen Leitfähigkeit $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ erhält man

$$\sigma = \frac{e^2n_e}{m_e}\tau \quad (3.32)$$

Die Stoßzeit τ ist durch die Abbremszeit der Elektronen an den Ionen gegeben; für $v_{D,e} \ll v_{th,e}$ ist diese durch die thermische Bewegung bestimmt und wir können $\tau_{ei} \approx \tau_{ee}$ aus Gl. (3.21) bzw. (3.23) einsetzen. Damit erhalten wir

$$\sigma = \frac{3(4\pi\epsilon_0)^2}{4\sqrt{2\pi}m_e e^2 \ln\Lambda} (kT)^{3/2} \Rightarrow \sigma[\Omega^{-1}\text{m}^{-1}] \approx 9.6 \times 10^3 \frac{(T_e[\text{eV}])^{3/2}}{\ln\Lambda} \quad (3.33)$$

Dies ist die von der Dichte unabhängige elektrische Leitfähigkeit eines Plasmas, wie sie zuerst von L. Spitzer abgeleitet wurde (sog. *Spitzer-Leitfähigkeit*). Eine genauere Analyse ergibt einen ungefähr doppelt so großen Wert (Spitzer und Härm, 1953). Außerdem muß man in einem Plasma mit mehreren Ionensorten die Abhängigkeit von der effektiven Ionenladungszahl Z_{eff} berücksichtigen:

$$\sigma[\Omega^{-1}\text{m}^{-1}] = 1.92 \times 10^4 (2 - Z_{eff}^{-1/3}) \frac{(T_e[\text{eV}])^{3/2}}{Z_{eff} \ln\Lambda} \quad (3.34)$$

mit

$$Z_{eff} = \frac{\sum_k n_k Z_k^2}{\sum_k n_k Z_k} = \frac{\sum_k n_k Z_k^2}{n_e} \quad (3.35)$$

Z_{eff} : der Faktor, um den die Bremsstrahlung über der eines reinen H-Plasma liegt wobei über alle Ionensorten k zu summieren ist. Für ein reines Plasma von Ionen der Kernladung Z ist $Z_{eff} = Z$; für ein Wasserstoffplasma mit z.B. 1 % Verunreinigung durch C ($Z = 6$) ergibt sich $Z_{eff} \approx 1.3$, d.h. Z_{eff} kann auch als Maß für den Verunreinigungsgrad eines Wasserstoffplasmas angesehen werden.

Für ein typisches Fusionsplasma ergeben sich große Werte für σ : Man erhält für $T_e = 1$ keV, $Z_{eff} = 1$ und $\ln\Lambda = 17$ einen Wert von $\sigma = 3.5 \times 10^7 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$. Dies ist vergleichbar der spezifischen Leitfähigkeit von Kupfer ($\sigma_{Cu} \approx 6 \times 10^7 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$). Man kann also in Plasmen mit relativ geringer Spannung große Ströme treiben. Dies wird im Tokamak ausgenutzt, wo

durch einen Transformator eine Umfangsspannung U_ℓ am Plasmatorus angelegt wird, um einen Strom zu treiben. Mit den obigen Daten und einer typischen Querschnittsfläche von z.B. $A = 1.25 \text{ m}^2$ (für das Garching Tokamak Experiment ASDEX Upgrade) erhält man die für einen Strom von 1 MA notwendige Umfangsspannung $U_\ell = 2\pi R_0 E = 2\pi R_0 j / \sigma = 2\pi R_0 I / (A\sigma) \approx 250 \text{ mV}$. Hierbei wurde für den großen Radius des Plasmas der Wert $R_0 = 1.65 \text{ m}$ verwendet.

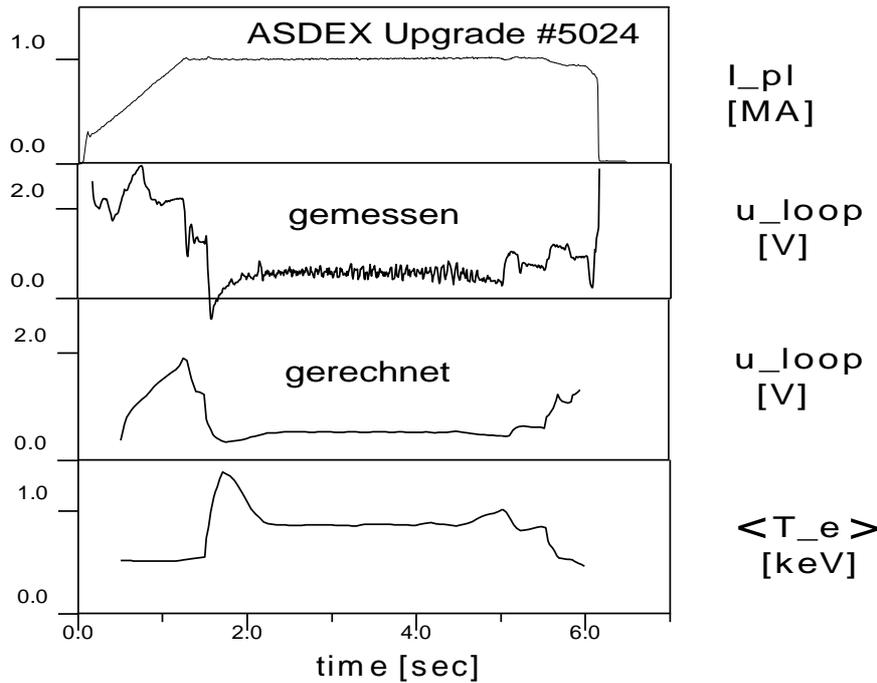


Abbildung 3.4: Tokamakentladung mit gemessenem und berechnetem Verlauf der Umfangsspannung (verwendet wurde die Spitzerleitfähigkeit mit toroidalen Korrekturen).

Fig. 3.4 zeigt den zeitlichen Verlauf einer Plasmaentladung in ASDEX Upgrade; zusätzlich zu den gemessenen Daten I_p , U_ℓ und der gemittelten Elektronentemperatur $\langle T_e \rangle$ ist die unter Verwendung von Gl. (3.34) berechnete Umfangsspannung abgebildet. Man erkennt die gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment.

Nachträglich können wir nun noch die Annahme $v_{D,e} \ll v_{th,e}$ prüfen: Für obiges Zahlenbeispiel erhalten wir für eine typische Dichte von $5 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$ die mittlere Driftgeschwindigkeit $v_{D,e} = I / (An_e e) = 10^5 \text{ m/s}$. Die thermische Geschwindigkeit in eine Richtung beträgt $v_{th,e} = \sqrt{kT/m_e} = 1.3 \times 10^7 \text{ m/s}$. Die Annahme $v_{D,e} \ll v_{th,e}$ war also gerechtfertigt.

Trotzdem existiert auf Grund der Maxwellverteilung immer eine Population von Elektronen, welche höhere Geschwindigkeiten als v_{th} aufweisen. Für diese müssen wir die Kraftbilanz gesondert betrachten: Da die Bremskraft F nach Gl. (3.15) mit dem Quadrat der Geschwindigkeit abnimmt, existiert ein kritischer Wert der Geschwindigkeit v_c , jenseits derer für gegebenes E das Elektron im Feld zwischen zwei Stößen mehr Impuls aufnimmt, als es beim Stoß abgibt.

$$F(v_c) = eE \Rightarrow v_c = \sqrt{\frac{e^3 n_e \ln \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 m_e E}} \quad (3.36)$$

Elektronen mit $v > v_c$ werden kontinuierlich beschleunigt, sie 'laufen davon'. Man spricht daher von *Runaway-Elektronen*. Die Zahl der Runaway-Elektronen ist in Tokamakentladungen mit $v_{th,e} \ll v_c$ gering, da nur wenige Elektronen die Bedingung $v_e \geq v_c$ erfüllen. Für $v_c \rightarrow c$ führen relativistische Effekte dazu, daß unterhalb eines gewissen E -Feldes überhaupt keine Runaway-Elektronen auftreten. Eine nennenswerte Population von Runaways wird erst vor kommen, wenn $v_c \approx v_{th}$ gilt. Dies führt zum kritischen elektrischen Feld E_c

$$E_c \approx \frac{e^3 n_e \ln \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 k T_e} \quad (3.37)$$

Man kann zeigen, daß für $E > 0.43E_c$ die gesamte Elektronenpopulation zu Runaways wird. Für $n_e = 1 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$ und $T_e = 1 \text{ keV}$ erhält man $E_c \approx 4.6 \text{ V/m}$. In der Anfangsphase einer Tokamakentladung in ASDEX Upgrade kommt man solchen Werten am nächsten; tatsächlich wird $E \approx 1/10E_c$ erreicht. Dann beobachtet man im Experiment bei niedriger Dichte in der Stromaufbauphase das Auftreten von Runaway-Elektronen. Diese können an Hand der von ihnen emittierten Synchrotronstrahlung nachgewiesen werden; bei einem plötzlichen Verlust (Instabilität) können sie zu Beschädigungen des Entladungsgefäßes führen.

3.4.2 Wärmeleitung

Analog zur Behandlung der elektrischen Leitfähigkeit wollen wir nun die elektronische Wärmeleitfähigkeit κ_e berechnen. Diese ist über den Wärmefluß \mathbf{q}_e als Antwort auf den Temperaturgradienten definiert:

$$\mathbf{q}_e = -\kappa_e \nabla T_e \quad (3.38)$$

Hier ist die transportierte Größe die Wärme, die pro Teilchen transportierte Menge ist kT_e . Die verallgemeinerte Kraft als Gradient einer Energie ist durch ∇kT gegeben. Wir erhalten so

$$\mathbf{q} = kT_e n_e \mathbf{v}_{D,e} = \frac{kT_e n_e}{m_e} \tau (k \nabla T_e) \quad (3.39)$$

oder, durch Vergleich mit (3.32) und (3.38)

$$\kappa_e = \frac{k^2 T_e n_e}{m_e} \tau \Rightarrow \kappa_e = \left(\frac{k}{e}\right)^2 T_e \sigma \quad (3.40)$$

Diese Relation ist in der Festkörperphysik als *Wiedemann-Franz'sches Gesetz* bekannt. Dort ergibt sich allerdings noch ein Faktor $\pi^2/3$ vor T_e . Auch im Plasma ergibt eine genauere Rechnung einen anderen Vorfaktor (≈ 2.2) und man erhält

$$\kappa_e[\text{J}/(\text{eV ms})] = 4.021 \times 10^4 \frac{(T_e[\text{eV}])^{5/2}}{\ln \Lambda} \quad (3.41)$$

für die klassische Elektronenwärmeleitfähigkeit im unmagnetisierten Plasma. Wichtig ist die starke Temperaturabhängigkeit, die dazu führt, daß in Fusionsplasmen längs der Feldlinien für Temperaturen ≥ 50 eV keine nennenswerten Temperaturgradienten aufrecht erhalten werden können.

Ein Zahlenbeispiel soll dies verdeutlichen: In einem Plasmazylinder mit Radius $r=5$ cm und Länge 1 m soll eine Zentraltemperatur von $T_0=10$ eV erreicht werden. Wir nehmen an, daß quer zur Zylinderachse der Wärmeverlust vernachlässigbar ist (dies kann z.B. durch ein Magnetfeld längs der Zylinderachse erreicht werden). Also muß ein Temperaturgradient von 10 eV auf einer Strecke von $L=0.5$ m aufrecht erhalten werden. Integration von Gl. (3.39) ergibt unter Verwendung von (3.41) $q = 2/7 \kappa_e T_0 / L$ und es fließt ein Wärmestrom von $q = 4 \times 10^4 / 17 \times 10^{5/2} 10 / 0.5 \approx 4.3 \times 10^6$ J/(m²s) zu jeder Wand. Um die Zentraltemperatur aufrecht zu erhalten, muß also das Zentrum mit $2q\pi r^2 \approx 70$ kW geheizt werden. Wegen der starken Temperaturabhängigkeit erhält man für das gleiche Zahlenbeispiel bei einer Zentraltemperatur von 100 eV bereits eine notwendige Leistung von $10^{7/2} \times 0.12 = 216$ MW (!). Mit einer einfachen linearen Anordnung ist es also wegen der Endverluste nicht möglich, zu hohen Temperaturen vorzudringen. Das führt dazu, daß Fusionsexperimente mit magnetischem Einschluß meist in toroidaler Geometrie arbeiten.

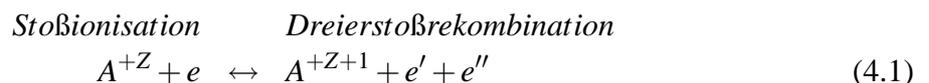
Kapitel 4

Thermodynamisches Gleichgewicht

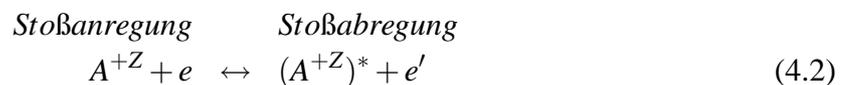
Ein physikalisches System befindet sich im thermodynamischen Gleichgewicht, wenn alle Prozesse mit ihren Umkehrprozessen im Gleichgewicht sind. Wie wir sehen werden, sind in Plasmen diese Voraussetzungen nur selten erfüllt. Wir werden daher zunächst die zu betrachtenden Einzelprozesse, welche die Verteilung von Teilchen und Strahlung bestimmen, diskutieren. Im Anschluß werden verschiedene Verfahren zur Berechnung von Teilchendichten und Strahlungsleistung in stationären Zuständen, die nicht dem thermodynamischen Gleichgewicht entsprechen, dargestellt.

4.1 Elementarprozesse und Ratengleichungen

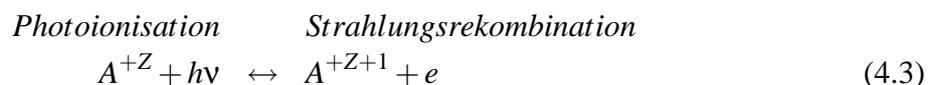
Neben den im vorherigen Kapitel diskutierten Coulomb-Stößen tragen zahlreiche andere Prozesse zur Ausbildung eines stationären Zustands bei. Die wichtigsten davon sind nachfolgend aufgeführt:



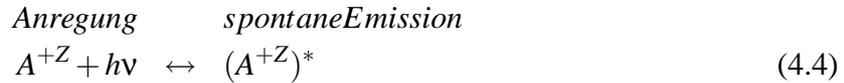
Hierbei kennzeichnet A^{+Z} ein Atom der Sorte A im Ladungszustand Z und e' ein Elektron mit veränderter Energie.



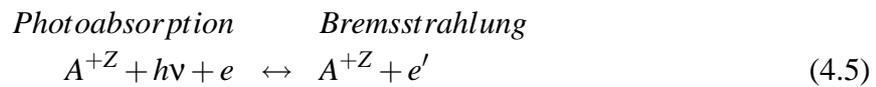
Dieser Prozeß führt zu strahlungslosen Übergängen (sog. 'Stöße zweiter Art'); er steht in Konkurrenz zur spontanen Emission.



Bei diesem Prozeß geht das Elektron von einem gebundenen in den freien Zustand und umgekehrt über; die Photonenenergien sind also kontinuierlich verteilt. Es gibt aber eine untere Grenzenergie, welche der Ionisationsenergie des Zustands A^{+Z} entspricht.



Hier handelt es sich um Übergänge zwischen gebundenen Zuständen; es ergibt sich daher ein Linienspektrum.



Das Elektron geht von einem freien in einen anderen freien Zustand über; das Bremsstrahlungsspektrum ist daher kontinuierlich.

Aus diesen Prozessen sollen nun die folgenden Gleichgewichtsgrößen bestimmt werden:

- Ionisationsgleichgewicht: Verteilung der Häufigkeiten aller Ionisationsstufen A^Z sowie der Neutralen A^0 .
- Strahlungsgleichgewicht: Aus der Zahl der emittierten Photonen pro Zeiteinheit ergibt sich $\varepsilon_\nu(\nu)$, die emittierte Leistung pro Volumen, Raumwinkel und Frequenz ($[\varepsilon_\nu] = \text{W} / (\text{m}^3 \text{ sr Hz})$). Der Index ν gibt an, daß es sich um eine differentielle Größe handelt, die Gesamtleistung pro Volumen und Raumwinkel ergibt sich durch Integration über alle Frequenzen. Die Absorption wird durch den Absorptionskoeffizienten $\alpha'(\nu)$ charakterisiert. Dieser gibt an, nach welcher Weglänge die Strahldichte eines Strahles im Medium auf das $1/e$ fache abgeschwächt wird ($[\alpha'(\nu)] = 1/\text{m}$).

Im allgemeinsten Fall stellt man für jeden der Prozesse (4.1) bis (4.5) eine sogenannte *Ratengleichung* auf. Diese ist von der Form einer Kontinuitätsgleichung, d.h.

$$\frac{dn}{dt} = \text{Quellen} - \text{Senken} \quad (4.6)$$

Dabei ergibt sich der Quellterm (bzw. die Senke) aus dem Produkt der Dichten der beteiligten Teilchensorten und dem entsprechenden Ratenkoeffizienten. Dieser gibt die Zahl von Reaktionen (Ionisation, Rekombination etc.) pro Zeiteinheit und Dichte der beteiligten Teilchen an. Für Zweierstöße setzt sich der Ratenkoeffizient zusammen aus dem Produkt der Relativgeschwindigkeit der Teilchen und dem Wirkungsquerschnitt für die betreffende Reaktion. Wir haben bereits gesehen, daß die Relativgeschwindigkeit in Plasmen häufig gleich der Elektromengeschwindigkeit ist, der Ratenkoeffizient läßt sich daher häufig als $\langle \sigma v_e \rangle$ ausdrücken, wobei die Klammern eine Mittelung über die Maxwellverteilung bedeuten.

Die Ratengleichung für den Prozeß (4.1) schreibt sich dann als

$$\frac{dn_{Z+1}}{dt} = n_e n_Z \langle \sigma_{Z\nu} \rangle_{\text{Stoßionisation}} - n_e^2 n_{Z+1} \beta_{Z+1, \text{Dreierrekombination}} \quad (4.7)$$

wobei $\beta_{Z+1, \text{Dreierrekombination}}$ der entsprechende Ratenkoeffizient für den Dreierstoß ist. Die Ratengleichungen für die übrigen Prozesse ergeben sich analog. Prinzipiell kann man also alle Information durch simultanes Lösen der Ratengleichungen für alle Prozesse und Ionisationsstufen gewinnen. Man erhält so ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem. Zusätzlich zum mathematisch aufwendigen Problem der Lösung dieses Systems tritt jedoch eine weitere Schwierigkeit auf: Die Ratenkoeffizienten sind oftmals nicht mit der erforderlichen Genauigkeit berechenbar; experimentelle Daten liegen nur in begrenztem Umfang vor. Im folgenden werden wir daher Voraussetzungen über die Gültigkeit des thermodynamischen Gleichgewichtes machen und somit einen anderen Zugang zu der Berechnung der Teilchen- und Strahlungsdichten finden.

4.2 Vollständiges Gleichgewicht

Im vollständigen thermodynamischen Gleichgewicht ist jeder einzelne Prozeß mit seinem Umkehrprozeß im Gleichgewicht (detailliertes Gleichgewicht). Das System läßt sich dann durch Angabe einiger weniger thermodynamischer Variablen charakterisieren. Diese sind z.B. die Temperatur T , der Druck p und das chemische Potential μ . Die Temperatur allein bestimmt bereits die Gleichgewichte von Teilchen und Strahlung über die folgenden Gleichungen:

- Die Teilchengeschwindigkeiten jeder Teilchensorte sind durch die Maxwellverteilung (2.29) gegeben.
- Die Besetzung der Energieniveaus eines Atoms folgt der Boltzmannbesetzung

$$\frac{n_k}{n_\ell} = \frac{g_k}{g_\ell} e^{-\frac{E_k - E_\ell}{kT}} \quad (4.8)$$

wobei g_k die Entartung des k -ten Niveaus bezeichnet.

- Wie aus der Thermodynamik bekannt, berechnet sich hieraus die Strahldichte L_ν , d.h. die Leistung pro Fläche, Frequenz und Raumwinkel nach der Planckschen Formel für die Schwarzkörperstrahlung

$$L_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \equiv B_\nu(T) \quad (4.9)$$

Die Einheit ist also $[B_\nu] = \text{W} / (\text{m}^2 \text{ sr Hz})$.

- Die abgestrahlte Gesamtleistung pro Fläche ergibt sich nach dem Stefan-Boltzmann Gesetz zu

$$E_{ges} = \sigma T^4 \quad (4.10)$$

mit $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W / (m}^2 \text{ K}^4)$.

- Die Teilchenzahl in unterschiedlichen Ionisationsstufen berechnet sich nach der *Saha-Gleichung*

$$\frac{n_{Z+1}n_e}{n_Z} = 2 \frac{g_{Z+1}}{g_Z} \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{W_{i,Z}}{kT}} \quad (4.11)$$

wobei $W_{i,Z}$ die Ionisationsenergie der Ladungsstufe Z ist.

Die Ableitung der Saha-Gleichung gestaltet sich wie folgt: Im Gleichgewicht ist $d/dt = 0$, daher läßt sich Gleichung (4.7) umschreiben in

$$\frac{n_{Z+1}n_e}{n_Z} = \frac{\langle \sigma_Z v \rangle_{\text{Stoßionisation}}}{\beta_{Z+1, \text{Dreierrekombination}}} = f(T) \quad (4.12)$$

Diese Gleichung hat die Form eines Massenwirkungsgesetzes für n_Z, n_{Z+1} und n_e . An Stelle der Auswertung der Ratenkoeffizienten kann man im thermodynamischen Gleichgewicht die temperaturabhängige Reaktionskonstante wie folgt berechnen: Das Verhältnis der Besetzung der unterschiedlichen Ionisationsstufen erhält man aus der Boltzmannbesetzung

$$\frac{n_{Z+1}}{n_Z} = \frac{g_{Z+1}}{g_Z} e^{-\frac{E_{Z+1} - E_Z}{kT}} = \frac{g_{Z+1}}{g_Z} e^{-\frac{W_{i,Z}}{kT}} \quad (4.13)$$

Die Dichte der freien Elektronen bei der Energie E ist nach Gl. (2.6) $dn_e = g(E) \exp(-E/kT) dE$. Das Produkt $n_{Z+1}n_e/n_Z$ ergibt sich daher durch Integration über alle Energien

$$\frac{n_{Z+1}n_e}{n_Z} = \frac{g_{Z+1}}{g_Z} e^{-\frac{W_{i,Z}}{kT}} \frac{(2m_e^3)^{1/2}}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \sqrt{E} e^{-\frac{E}{kT}} dE \quad (4.14)$$

Das Integral ergibt $1/2\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}$, so daß man als Endergebnis Gl. (4.11) erhält.

Die obige Ableitung berücksichtigte nur die Grundzustände der einzelnen Ionisationsstufen. Eine genauere Ableitung zeigt, daß bei Berücksichtigung der angeregten Zustände die Entartungsgrade g_Z durch die Zustandssumme $Q_Z = \sum_k g_{Z,k} \exp(-(E_{Z,k} - E_{1,k})/(kT))$ zu ersetzen ist. Die Summation verläuft dabei über alle angeregten Zustände k einer Ionisationsstufe.

Beim Wasserstoff liegen die angeregten Niveaus bei relativ hohen Energien ($\approx 10 \text{ eV}$) und somit ist bei niedriger Temperatur hauptsächlich der Grundzustand bevölkert. Hier läßt sich also mit $W_i = 13.6 \text{ eV}$, $n_e = n_i = n_{Z+1}$, $n_Z = n_0$, $g_0 = 2$ und $g_1 = 1$ der Ionisationsgrad für $T \approx 1$

eV direkt mit Gl. (4.11) als $f(n, T)$ berechnen. Die Ionisationsgrenze in Fig. 2.1 wurde nach dieser Formel ausgewertet. Für Dichten $> 10^{25} \text{ m}^{-3}$ muß man allerdings in Saha-Gleichung die Erniedrigung der Ionisationsenergie durch die atomaren E -Felder (Mikrofelder) berücksichtigen.

4.3 Lokales thermisches Gleichgewicht

In der Praxis sind die Bedingungen für das vollständige thermodynamische Gleichgewicht fast nie erfüllt. Dies liegt daran, daß in Plasmen generell Temperatur- und Dichtegradienten auftreten. Man behilft sich damit, Bereiche zu definieren, in denen die Gradientenlängen groß gegen die freie Weglänge von Teilchen und Photonen sind. In diesen Bereichen kann man für das Plasma näherungsweise konstante Dichte und Temperatur annehmen. Sind diese Verhältnisse gegeben, spricht man vom lokalen thermodynamischen Gleichgewicht (LTE). Diese Beschreibungsweise trifft vor allem im Sonneninneren recht gut zu.

Bei hinreichend hoher Stoßrate sind die Stoßionisation/Dreierstoßrekombination (4.1) und Stoßanregung/Stoßabregung (4.2) im detaillierten Gleichgewicht und somit gelten Maxwellverteilung, Boltzmannbesetzung und Sahagleichung. Ein Problem ergibt sich bei den Prozessen (4.3) bis (4.5). Hier sind Photonen beteiligt. Im detaillierten Gleichgewicht müssen genauso viele Photonen emittiert wie absorbiert werden. In der Praxis ist dies oft nicht der Fall, da Photonen im Plasma eine relativ große freie Weglänge haben und somit entweichen können.

Dies sieht man sofort für ein kugelförmiges Fusionsplasma von Radius $r = 1 \text{ m}$, $T = 10 \text{ keV}$ und $n = 10^{20} \text{ m}^{-3}$. Im thermodynamischen Gleichgewicht ergäbe sich die abgestrahlte Leistung nach (4.10) zu $P_{rad} = 4\pi r^2 \sigma T^4 = 1.4 \times 10^{26} \text{ W}(!)$. Die gespeicherte Energie beträgt $4\pi r^3 nkT = 2 \times 10^6 \text{ J}$, d.h. die gespeicherte Energie würde in $\approx 10^{-20} \text{ s}$ abgestrahlt. Ein Fusionsplasma kann also bezüglich der Strahlung nicht im thermodynamischen Gleichgewicht sein. Damit sind die Planck'sche Strahlungsformel und das Stefan-Boltzmann Gesetz nicht mehr anwendbar.

Eine genauere Untersuchung der Strahlung muß daher von der Strahlungstransportgleichung ausgehen. Sie ist wiederum von der Form einer (räumlichen) Kontinuitätsgleichung $dL_\nu/dx = \text{Quellen} - \text{Senken}$ für die Strahldichte L_ν , d.h. die Leistung pro Fläche, Frequenz und Raumwinkel. Als Quelle hat man den Emissionskoeffizienten durch spontane Emission $\epsilon_\nu(\nu)$ sowie den Beitrag der induzierten Emission $dL_\nu/dx = \beta L_\nu$ zu berücksichtigen ($[\beta] = 1/\text{m}$). Die Senke bildet die Absorption von Photonen, d.h. $dL_\nu/dx = -\alpha L_\nu$ ($[\alpha] = 1/\text{m}$). Wir erhalten also

$$\frac{dL_\nu}{dx} = \epsilon_\nu - (\alpha - \beta)L_\nu \quad (4.15)$$

Wir fassen nun $(\alpha - \beta)$ zum effektiven Absorptionskoeffizienten $\alpha'(\nu)$ zusammen. Diese Größe wurde bereits oben eingeführt. Nach Zusammenfassen und Division durch α' folgt

$$\frac{1}{\alpha'} \frac{dL_\nu}{dx} = \frac{\epsilon_\nu}{\alpha'} - L_\nu \quad (4.16)$$

Das Verhältnis ε_ν/α' erhalten wir analog zur Ableitung der Planck'schen Formel in der Thermodynamik mit Hilfe der Einsteinkoeffizienten für Emission und Absorption zwischen zwei Niveaus 1 und 2 mit Besetzungsdichte n_1 und n_2 aus dem Prinzip des detaillierten Gleichgewichts:

$$\frac{\varepsilon_\nu}{\alpha' L_\nu} = \frac{c}{4\pi L_\nu} \frac{A_{21} n_2}{(B_{12} n_1 - B_{21} n_2)} = \frac{c}{4\pi L_\nu} \frac{A_{21}}{B_{21}} \frac{n_2}{n_1 - n_2} = \frac{2h\nu^3}{L_\nu c^2} \frac{n_2}{n_1 - n_2} \quad (4.17)$$

Dabei haben wir die aus der Atomphysik bekannten Relationen $B_{12} = B_{21}$ und $A_{21}/B_{21} = 8\pi h\nu^3/c^3$ verwendet. Wie oben erwähnt, gilt bei genügend hoher Stoßrate die Boltzmannbesetzung der Niveaus 1 und 2 und wir erhalten

$$\frac{\varepsilon_\nu}{\alpha'} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{-\frac{h\nu}{kT}} - 1} = B_\nu(T) \quad (4.18)$$

Diese Beziehung ist als Kirchhoffscher Satz bekannt. Bei genügend hoher Stoßrate gilt es auch dann, wenn die Photonen selbst entweichen können, d.h. wenn die Bedingungen für Schwarzkörperstrahlung nicht mehr gegeben sind.

Mit dieser Beziehung können wir die Strahlungstransportgleichung (4.15) umschreiben

$$\frac{1}{\alpha'} \frac{dL_\nu}{dx} = B_\nu(T) - L_\nu \quad (4.19)$$

Es ist zweckmäßig, die dimensionslose Variable τ einzuführen. Diese bezeichnet man als *optische Dicke*:

$$\tau = \int_x^{x_0} \alpha' dx \quad (4.20)$$

Das Integral erstreckt sich längs des Sichtstrahls von einem Ort x im Plasma zum Ort x_0 , an dem die Strahlung detektiert wird. Die Strahlungstransportgleichung läßt sich dann lösen und wir erhalten

$$L_\nu(\tau) = B_\nu(T)(1 - e^{-\tau}) \quad (4.21)$$

Für $\tau \ll 1$ wächst also die Strahldichte linear mit der Schichtdicke, dieser Fall wird als optisch dünn bezeichnet. Für $\tau \gg 1$ (optisch dicker Fall) nähert sich die Strahldichte asymptotisch der Schwarzkörperstrahlung an.

Wie bereits oben erwähnt, liegt in Plasmen oft der optisch dünne Fall vor, v.a. bei der Kontinuumsstrahlung, für die der Absorptionskoeffizient klein ist. Dies ändert sich in der Nähe der Resonanzlinien, d.h. bei Frequenzen, die den Anregungen der Atome aus dem Grundzustand entsprechen. Fig. 4.1 zeigt eine Modellrechnung für die optische Dicke der Lyman Serie des Wasserstoff in einem kalten, dichten Plasma, wie es z.B. typisch für eine Bogenentladung ist. In der Nähe der Linienzentren wird v.a. L_α optisch dick (die Linienverbreiterung durch Doppellereffekt ist stark übertrieben dargestellt). Dies findet sich wieder im Emissionsspektrum, das

in Fig. 4.2 dargestellt ist: Im Linienzentrum erreicht die Strahldichte den durch die Planck-Kurve gegebenen Wert, im Kontinuum verschwindet sie praktisch. Daher liegt die abgestrahlte Gesamtleistung weit unter dem mit dem (durch Integration der Planck-Kurve gewonnenen) Stefan-Boltzmann Gesetz berechneten Wert.

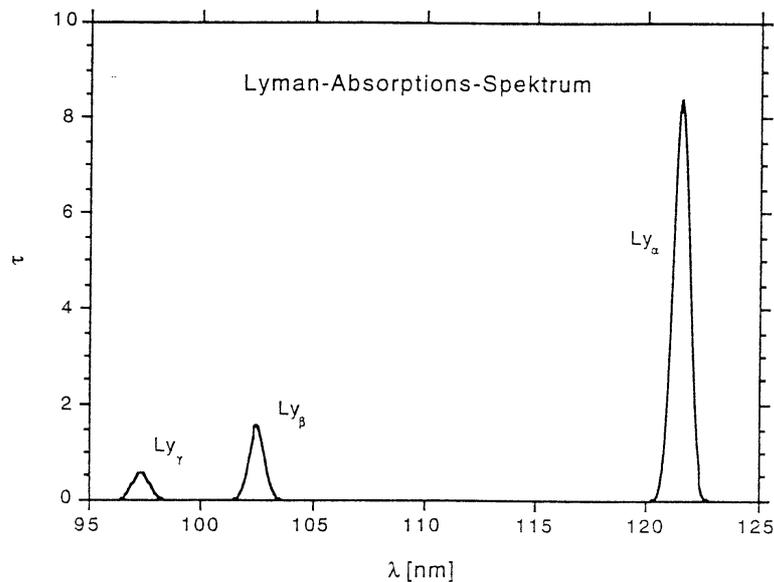


Abbildung 4.1: *Optische Dicke eines Plasmas im spektralen Bereich der Lyman- α Serie.*

Befindet sich vor dem Emissionsvolumen mit $T = T_1$ eine kalte Gas- oder Plasmaschicht mit $T = T_2 \ll T_1$, welche an den Resonanzlinien stark absorbierend ist, so wird die Strahlung dort re-absorbiert und -emittiert. Die Strahldichte der re-emittierten Strahlung erreicht jedoch maximal den durch $B_V(T_2)$ gegebenen Wert. Wird zum Beispiel das Licht einer Plasmaentladung mit $T_1 = 1$ eV im vorgelagerten Gas von Raumtemperatur ($T_2 \approx 0.03$ eV) absorbiert und re-emittiert, so fällt die Strahldichte im Linienzentrum mindestens um den Faktor $B_V(T_2)/B_V(T_1) \approx \exp(-33) \approx 10^{-15} \approx 0$. Da die Dopplerverbreiterung mit der Temperatur abnimmt, fällt die Strahldichte im Linienzentrum auf ein Minimum. Dies ist in Fig. 4.2 angedeutet. Den Effekt bezeichnet man als *Selbstumkehr* der Linien.

Ein weiteres Beispiel findet sich in der Sonne: Dort wird die aus der (optisch dicken) Photosphäre abgestrahlte Kontinuumsstrahlung im kalten Gas der Sonnenperipherie absorbiert; da das kalte Gas nur bei den Wasserstoffspektrallinien stark reabsorbiert, ergeben sich Absorptionslinien im Sonnenspektrum bei den Frequenzen der Wasserstoff-Spektralserien. Diese sind als *Fraunhoferlinien* bekannt.

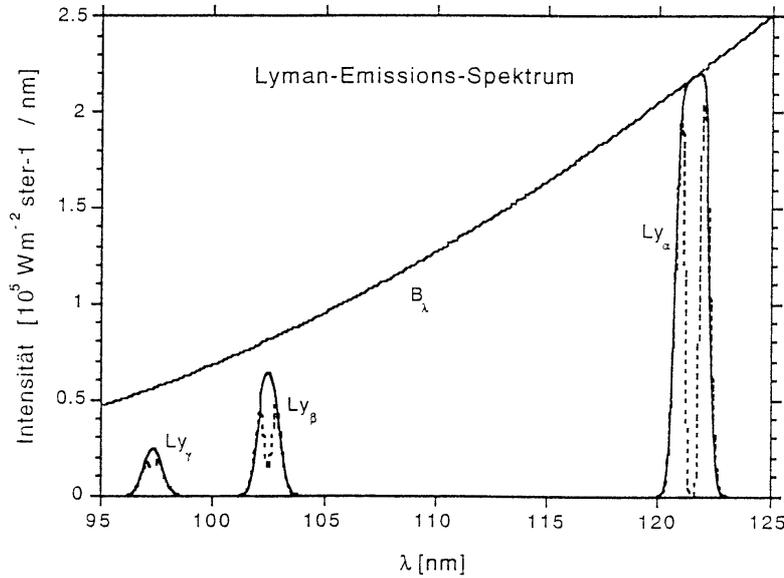


Abbildung 4.2: Strahldichte der emittierten Strahlung für die Parameter aus Fig. 4.2. Die Strahldichte der Linienzentren nähert sich der ebenfalls eingezeichneten Strahldichte eines schwarzen Strahlers an. Die gestrichelte Linie beschreibt den Fall einer vorgelagerten kalten Schicht niedrigerer Temperatur; es tritt Selbstumkehr auf.

4.4 Koronagleichgewicht

Mit abnehmender Dichte wird die Stoßrate so klein, daß das detaillierte Gleichgewicht auch in den stoßbestimmten Prozessen (4.1) und (4.2) nicht mehr gegeben ist. Wir erhalten dann ein nicht-thermisches Plasma. Der kritische Prozeß ist hierbei die Dreierstoßrekombination, der mit $n_e^2 n_{Z+1}$ sinkt. Dagegen sinkt bei abnehmender Dichte die Rate für die Strahlungsrekombination in (4.3) nur mit $n_e n_{Z+1}$, während der inverse Prozeß, die Photoionisation, wegen der großen freien Weglänge der Photonen immer unwahrscheinlicher wird. Bei geringer Dichte wird also die Ionisation hauptsächlich durch Stoßionisation, die Rekombination durch Strahlungsrekombination geschehen. Die dabei entstehenden Photonen verlassen in der Regel das Plasma, ohne re-absorbiert zu werden. Die entsprechenden Ratengleichungen für die Ionisationsstufen eines Atoms der Kernladung Z_K sind dann von der Form

$$\frac{dn_0}{dt} = - \langle \sigma_{0,ion} v \rangle n_e n_0 + \langle \sigma_{1,rek} v \rangle n_e n_1 \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{dn_Z}{dt} = & - \langle \sigma_{Z,ion} v \rangle n_e n_Z - \langle \sigma_{Z,rek} v \rangle n_e n_Z \\ & + \langle \sigma_{Z-1,ion} v \rangle n_e n_{Z-1} + \langle \sigma_{Z+1,rek} v \rangle n_e n_{Z+1} \quad (0 < Z < Z_K) \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\frac{dn_{Z_K}}{dt} = - \langle \sigma_{Z_K,rek} v \rangle n_e n_{Z_K} + \langle \sigma_{Z_K-1,ion} v \rangle n_e n_{Z_K-1} \quad (4.24)$$

Dieses Modell wurde zuerst für die Sonnenkorona entwickelt; es wird daher auch als *Korona-Ionisationsgleichgewicht* bezeichnet. Im stationären Fall verschwinden die zeitlichen Ableitungen und wir erhalten die allgemeine Lösung

$$\frac{n_{Z+1}}{n_Z} = \frac{\langle \sigma_{Z,ion} v \rangle}{\langle \sigma_{Z+1,rek} v \rangle} \quad (4.25)$$

Nach dieser Formel lassen sich also bei bekannten Wirkungsquerschnitten sämtliche Ionendichten im Koronagleichgewicht berechnen. Da die Wirkungsquerschnitte und die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen nur eine Funktion der Temperatur sind, kann man für ein gegebenes räumliches Temperaturprofil $T(r)$ im Plasma die relativen Häufigkeiten der verschiedenen Ionisationsstufen als Funktion des Ortes r berechnen. Fig. 4.3 zeigt das Ergebnis einer solchen Rechnung für Wolfram in einem Fusionsplasma mit einer Zentraltemperatur von ≈ 2.5 keV. Die einzelnen Ionisationsstufen ordnen sich in sogenannten 'Schalen' an; die höchsten Ionisationsstufen werden im heißen Zentrum des Plasmas ($r = 0$) erreicht.

In der Fusionsforschung versteht man unter Korona-Gleichgewicht neben dem Ionisationsgleichgewicht (4.25) auch noch das analoge Strahlungsgleichgewicht: Mit sinkender Dichte nimmt auch die Wahrscheinlichkeit für die Stoßabregung ab, während die spontane Emission als Abregungsmechanismus unabhängig von der Dichte ist. Somit stellt sich für die Strahlung ein Gleichgewicht zwischen Stoßanregung und spontaner Emission ein. Die entsprechende Ratengleichung für die Dichte des angeregten Zustands k ergibt sich dann zu

$$\frac{dn_k}{dt} = n_0 n_e \langle \sigma_k v \rangle - n_k \sum_{\ell} A_{k\ell} \quad (4.26)$$

wobei angenommen wurde, daß die Anregung nur aus dem Grundzustand erfolgt und $A_{k\ell}$ der Einsteinkoeffizient für spontane Emission des Übergangs $k \rightarrow \ell$ ist. Im stationären Zustand ergibt sich

$$n_k = \frac{n_0 n_e \langle \sigma_k v \rangle}{\sum_{\ell} A_{k\ell}} \quad (4.27)$$

Die lokale Linienemissivität bei der Frequenz $\nu = (E_k - E_m)/h$ ergibt sich daraus wie folgt: Jedes angeregte Atom emittiert mit der Rate A_{km} Photonen der Energie $h\nu$; daher folgt für die lokale Strahlungsleistung pro Volumen

$$\epsilon_{km} = n_0 n_e \langle \sigma_k v \rangle h\nu \frac{A_{km}}{\sum_{\ell} A_{k\ell}} \quad (4.28)$$

wobei $A_{km}/\sum_{\ell} A_{k\ell}$ auch als *Verzweigungsverhältnis* (Branching Ratio) bezeichnet wird. Unter Kenntnis der atomaren Daten kann man mit diesem Ausdruck die Strahlungsleistung im Koronagleichgewicht berechnen.

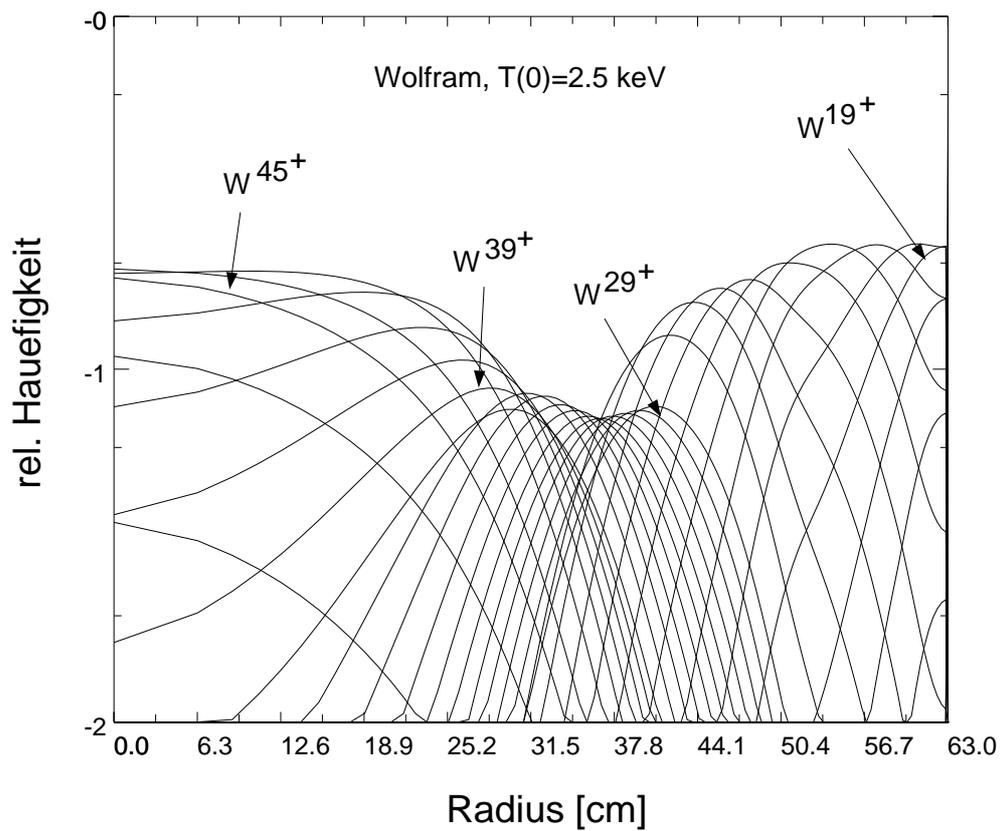


Abbildung 4.3: Häufigkeitsverteilung der verschiedenen Ionisationsstufen von Wolfram in einem Fusionsplasma der Zentraltemperatur $T(r=0) = 2.5$ keV, berechnet nach dem Koronamodell.

Kapitel 5

Teilchenbewegung im Magnetfeld

Wir hatten bereits die Wirkung elektrischer Felder auf ein Plasma untersucht: Sie führen zu einer Beschleunigung der Teilchen und, zusammen mit den Coulombstößen, zum Auftreten elektrischer Ströme. Wir hatten jedoch auch gesehen, daß externe elektrostatische Felder nur auf der Größenordnung der Debye-Länge in das Plasma eindringen können; die Kontrollmöglichkeit über ein Plasma durch solche Felder ist also stark eingeschränkt. Im Gegensatz hierzu ist eine Kontrollmöglichkeit durch extern erzeugte magnetische Felder gegeben; das B -Feld bindet die geladenen Teilchen an die Feldlinien. In der Fusionsforschung wird der Plasmaeinschluß daher hauptsächlich durch Magnetfelder vorgenommen. Auch im Weltall spielen Magnetfelder eine wichtige Rolle, indem sie die Teilchen führen. Ein Beispiel hierfür ist die in Kap. 1 bereits erwähnte Führung hochenergetischer Teilchen der kosmischen Strahlung im Erdmagnetfeld, die zum Auftreten des Polarlichtes führt.

Wir wollen daher im folgenden die Teilchenbahnen im Magnetfeld untersuchen. Diese sogenannte *Einzelteilchenbeschreibung* gibt einen ersten Überblick über die Effekte, die im System 'Plasma + Magnetfeld' auftreten können. Sie berücksichtigt aber nicht die Wechselwirkung der Teilchen untereinander, sodaß kollektive Effekte nicht korrekt beschrieben werden. Eine korrekte Beschreibung dieser Phänomene muß im Rahmen einer Vielteilchentheorie geschehen. Dazu werden wir im nächsten Kapitel die MHD (Magnetohydrodynamik) kennenlernen.

5.1 Bewegung im konstanten Magnetfeld

Die Bewegungsgleichung eines geladenen Teilchens im Magnetfeld ist durch die Lorentzkraft bestimmt

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_L = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (5.1)$$

Hierbei ist q die vorzeichenbehaftete Ladung des Teilchens (d.h. $q_e = -1.6 \times 10^{-19}$ C). Wegen $\mathbf{F}_L \perp \mathbf{B}$ ist $m\dot{\mathbf{v}}_{\parallel} = 0$, d.h. die Teilchenbewegung parallel zum Magnetfeld wird nicht beeinflusst. Für die mit \mathbf{v}_{\perp} , der Geschwindigkeit senkrecht zum Magnetfeld, verbundene kinetische Energie W_{\perp} erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_{\perp}^2\right) = m\mathbf{v}_{\perp}\dot{\mathbf{v}}_{\perp} = q\mathbf{v}_{\perp} \cdot \mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B} = 0 \quad (5.2)$$

d.h. die Senkrechtenergie bleibt erhalten. Nur die Richtung der Geschwindigkeit ändert sich. Aus der Elektrodynamik wissen wir bereits, daß geladene Teilchen im Magnetfeld eine Kreis- oder *Gyrationsbewegung* ausführen. Auf der Kreisbahn wird die Zentrifugalkraft $m\omega^2 r$ gerade durch die Lorentzkraft kompensiert. Wir erhalten also für die Zyklotron- oder auch *Larmorfrequenz* ω_c

$$m\omega_c^2 r = q\omega_c r B \rightarrow \omega_c = \frac{|q|B}{m} \quad (5.3)$$

Das Vorzeichen von ω_c ist somit nach Definition immer positiv; das Vorzeichen von q entscheidet aber über den Drehsinn der Gyration. Elektronen und Protonen haben entgegengesetzten Drehsinn im B -Feld. Dies ist in Fig. 5.1 veranschaulicht.

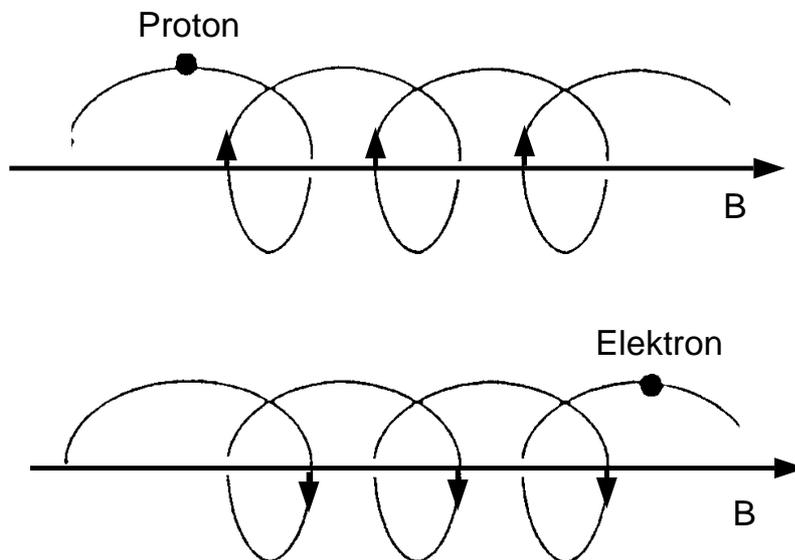


Abbildung 5.1: *Gyrationsbewegung von Protonen und Elektronen im magnetischen Feld*
 Der Gyroradius ist nicht maßstäblich dargestellt ($r_{L,e} \ll r_{L,i}$).

Die Gyration der Teilchen erzeugt einen Kreisstrom; das hierdurch erzeugte Magnetfeld ist dem ursprünglichen entgegengerichtet. Ein Einzelteilchen verhält sich also immer *diamagnetisch*.

Einsetzen der Zahlenwerte ergibt für die Elektronenzyklotronfrequenz

$$\omega_{ce}[\text{Hz}] = 1.76 \times 10^{11} B[\text{T}] \quad (5.4)$$

Die Ionenzyklotronfrequenz ω_{ci} ist um den Faktor m_e/m_i niedriger.

Die Gyrobewegung kann sowohl zur Diagnostik als auch zur Plasmaheizung verwendet werden:

- Bei der Elektronenzyklotronemissionsspektroskopie (ECE) wird die Elektronenzyklotronstrahlung ausgenutzt: Die Kreisbewegung entspricht einer Beschleunigung der Ladung; daher strahlt das Elektron bei der Frequenz ω_{ce} (und, wegen relativistischer Effekte, auch bei den Harmonischen $n\omega_{ce}$). Wegen des Resonanzcharakters ist diese Strahlung oftmals optisch dick; dann läßt sich aus der Absolutintensität über $Bv(T)$ die Temperatur der Elektronen bestimmen. Dieses Verfahren findet in der Fusionsforschung häufig Anwendung. Wegen $\omega_{ci} \ll \omega_{ce}$ ist die Intensität der Ionenzyklotronstrahlung viel geringer und diagnostischen Zwecken im allgemeinen nicht zugänglich.
- Eine eingestrahlte elektromagnetische Welle mit der Frequenz ω_c kann Energie auf die Teilchen übertragen; dies ist das Grundprinzip der resonanten Heizung der Elektronen (ECRH = Electron Cyclotron Heating, bzw. ICRH). Aus Gl.(5.3) ergeben sich die Resonanzfrequenzen für ein Fusionsplasma mit $B = 2$ T zu $\nu_{ce} = 56$ GHz bzw. $\nu_{ci} = 30$ MHz. Auf diese Heizmethoden werden wir später ausführlich eingehen.

Da bei einer Kreisbewegung $v = r\omega$ gilt, können wir den Gyrationen- oder Larmorradius r_L im thermischen Plasma mit $1/2mv_{\perp}^2 = kT$ (2 Freiheitsgrade senkrecht zu B) angeben:

$$r_L = \frac{mv_{\perp}}{|q|B} = \frac{\sqrt{2mkT}}{|q|B} \rightarrow r_{Le}[\text{m}] = 3.38 \times 10^{-6} \frac{\sqrt{T_e[\text{eV}]}}{B[\text{T}]} \quad (5.5)$$

Für 2 T und 1 keV ergibt sich $r_{Le} = 53\mu\text{m}$ und $r_{Li} = 2.2$ mm. In Fusionsplasmen sind also beide Gyrationenradien klein gegen die Systemlänge. Die Teilchen folgen daher in erster Näherung den Feldlinien; man spricht auch von einem *magnetisierten Plasma*. Allgemein ist die Bewegung, wegen der Überlagerung der vom Magnetfeld unbeeinflussten Bewegung parallel zu B , eine Schraubenlinie längs des Magnetfelds. Dies ist in Fig. 5.1 dargestellt.

5.2 Teilchendriften: 'Der Guiding Centre' Ansatz

Zusätzlich zur Lorentzkraft kann in der Bewegungsgleichung eine weitere Kraft F auftreten. Der allgemeine Fall schreibt sich dann als

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (5.6)$$

Es ergeben sich im allgemeinen keine geschlossenen Kreisbahnen mehr. Für räumlich und zeitlich konstantes B und F macht man den sogenannten 'guiding centre' Ansatz. Dieser geht davon aus, daß die durch F verursachte Bewegung der Gyration überlagert wird. Man erhält dann eine Bewegung des Führungszentrums \mathbf{r}_c (d.h. des Mittelpunktes des Gyrationenkreises) und, überlagert, die Gyrobewegung des Teilchens um das Führungszentrum herum. Diese wird ausgedrückt durch einen Vektor \mathbf{r}_g , der vom Ort \mathbf{r} des Teilchens zum Gyrozentrum zeigt und dessen Betrag den Wert des lokalen Gyroradius hat:

$$\mathbf{r}_c = \mathbf{r} + \mathbf{r}_g \quad \text{mit} \quad \mathbf{r}_g = \frac{m}{qB^2} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (5.7)$$

Dies ist vor allem dann nützlich, wenn die Bewegung des Gyrozentrums langsam im Vergleich zur Gyrationbewegung ist; dann stellt \mathbf{r}_c die über die Gyrationbewegung gemittelte Bahnkurve des Teilchens dar. Dies ist, wegen der hohen Gyrationfrequenz, häufig der Fall. Fig. 5.2 verdeutlicht die Geometrie.

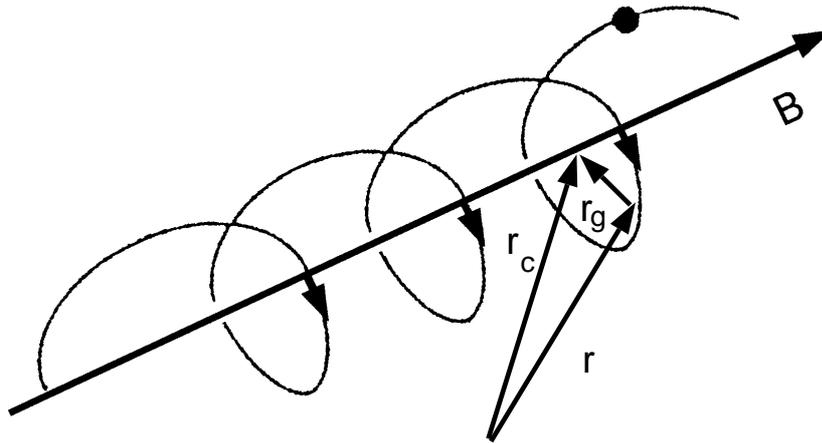


Abbildung 5.2: Aufspaltung der Bewegung eines Teilchens im Magnetfeld mit äußerer Kraft in Gyrationbewegung \mathbf{r}_g und Bewegung des Führungszentrums \mathbf{r}_c .

Die Geschwindigkeit \mathbf{v}_c des Führungszentrums läßt sich nun mit Hilfe der Bewegungsgleichung ausdrücken:

$$\mathbf{v}_c = \dot{\mathbf{r}}_c = \mathbf{v} + \frac{m}{qB^2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{B} = \mathbf{v} + \frac{1}{qB^2} (\mathbf{F} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (5.8)$$

der letzte Ausdruck läßt sich mit Hilfe der Vektoridentität

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} - B^2\mathbf{v} = B^2\mathbf{v}_{\parallel} - B^2\mathbf{v} = -B^2\mathbf{v}_{\perp} \quad (5.9)$$

weiter vereinfachen. Wir erhalten

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{v} + \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{qB^2} - \mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v}_{\parallel} + \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{qB^2} \quad (5.10)$$

Somit zerfällt \mathbf{v}_c in zwei Anteile:

- Die Parallelwegung; wegen $\mathbf{v} \times \mathbf{B} \perp \mathbf{B}$ ist diese durch $m\dot{\mathbf{v}}_{\parallel} = \mathbf{F}_{\parallel}$ gegeben.

- Die Bewegung senkrecht zu \mathbf{F} und \mathbf{B} . Da diese trotz konstanter Kraft nicht beschleunigt, sondern mit konstanter Geschwindigkeit erfolgt, wird sie, ähnlich der mittleren Elektronenbewegung beim Transport, als *Driftgeschwindigkeit* \mathbf{v}_D bezeichnet. Sie ist gegeben durch

$$\mathbf{v}_D = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{qB^2} \quad (5.11)$$

Es geht also nur der Anteil \mathbf{F}_\perp ein.

Im folgenden wollen wir einige Driften auf Grund unterschiedlicher Kräfte \mathbf{F} untersuchen.

$\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ Drift

Liegt ein externes E -Feld vor, so ist $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ und somit

$$\mathbf{v}_D = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (5.12)$$

Die Driftgeschwindigkeit ist ladungsunabhängig und für Elektronen und Ionen gleich. Dies führt zu einer globalen Bewegung des Plasmas senkrecht zum elektrischen und magnetischen Feld. Fig. 5.3 veranschaulicht die Driftbewegung: Verläuft die Bahnkurve des Teilchens längs des E -Feldes, so nimmt es Energie auf und v_\perp und damit auch r_L wächst. Kehrt das Teilchen seine Bewegungsrichtung um, so verlangsamt sich die Bewegung, und der Gyroradius wird wieder kleiner. Das Führungszentrum vollführt dadurch die Driftbewegung senkrecht zu E .

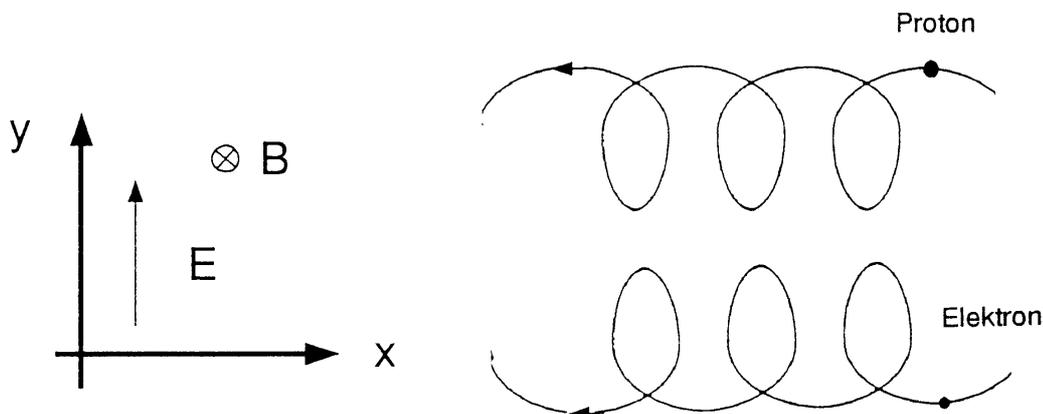


Abbildung 5.3: Veranschaulichung der $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ Drift: Das E -Feld zeigt in y -Richtung, das B -Feld in die Zeichenebene hinein. Die Drift erfolgt also längs der x -Achse. Wiederum sind die Gyroradien nicht maßstäblich.

Gleichung (5.12) läßt sich auch mit Hilfe der Lorentztransformation deuten: Gemäß der Transformation $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ verschwindet im mitbewegten System gerade das E -Feld und das Teilchen führt nur die Gyrobewegung aus.

Gravitationsdrift

Im Gravitationsfeld wirkt die Kraft $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$, sodaß die Gravitationsdrift durch

$$\mathbf{v}_D = \frac{m\mathbf{g} \times \mathbf{B}}{qB^2} \quad (5.13)$$

gegeben ist. Diese Bewegung läßt sich anschaulich analog zur $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ Drift deuten: Wiederum gewinnt das Teilchen bei Bewegung längs \mathbf{g} Energie, während es in Gegenrichtung Energie verliert.

Die Gravitationsdrift ist ladungsabhängig und führt zur Ladungstrennung und zu einem Strom

$$\mathbf{j}_g = n_e e (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) = n_e \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{B}}{B^2} \left(\frac{m_i}{Z} + m_e \right) \quad (5.14)$$

Dieser ist in Laborplasmen klein: Für $B = 1 \text{ T}$ und $n_e = 10^{20} \text{ m}^{-3}$ ergibt sich $j_g = 10^{-6} \text{ A/m}^2$. In kosmischen Plasmen, in denen die Gravitationskraft oftmals eine dominante Rolle spielt, sind diese Effekte jedoch häufig nicht zu vernachlässigen.

Diamagnetische Drift

In Anwesenheit eines Druckgradienten erfahren die Teilchen eine weitere Kraft: Die Kraft auf ein Volumenelement δV des Plasmas ist durch die Druckdifferenz gegeben, d.h. $F/\delta V = -\nabla p$. Im Volumenelement befinden sich $\delta N = n\delta V$ Teilchen, sodaß pro Teilchen die Kraft $-\nabla p/n$ ausgeübt wird. Dies führt also zu einer Drift

$$\mathbf{v}_D = -\frac{\nabla p \times \mathbf{B}}{qnB^2} \quad (5.15)$$

Anschaulich läßt sich diese Drift an Hand von Fig. 5.4 wie folgt deuten:

Zur Vereinfachung betrachten wir nur die Elektronen, der Druckgradient werde durch ∇n_e verursacht (d.h. $T_e = \text{const}$). Dann nimmt längs des Druckgradienten die Zahl der gyrierenden Teilchen zu. An einem beliebigen Punkt im Plasma bewegen sich also mehr Teilchen in positive y -Richtung; die Elektronen scheinen in y -Richtung zu driften. Man beachte aber, daß man es nicht mit einer Massenbewegung zu tun hat; die Teilchen selbst bleiben an ihrem Ort. Es entsteht jedoch ein Strom

$$\mathbf{j}_D = -\frac{\nabla p \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (5.16)$$

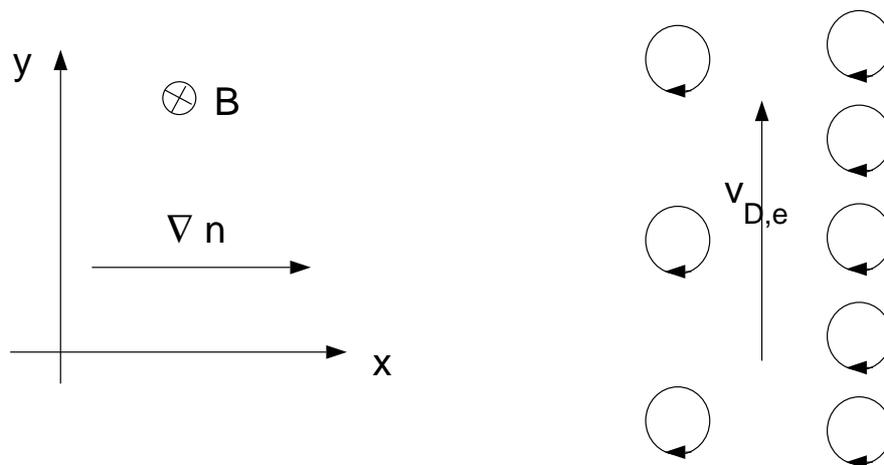


Abbildung 5.4: Veranschaulichung der diamagnetischen Drift der Elektronen: ∇n zeigt in x -Richtung, das B -Feld in die Zeichenebene hinein. Die Drift erfolgt also längs der y -Achse.

Dieser ist so gerichtet, daß das von ihm erzeugte Magnetfeld das ursprüngliche Magnetfeld im Gebiet hohen Druckes schwächt. Das Plasma verhält sich also diamagnetisch; man spricht daher auch von der diamagnetischen Drift. Für die Ionen gelten die gleichen Verhältnisse.

Multiplizieren wir Gl. (5.16) vektoriell von rechts mit \mathbf{B} und benutzen Gl. (5.9), so erhalten wir $\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p_{\perp}$. Ein Druckgradient senkrecht zum Magnetfeld wird also im Plasma durch einen diamagnetischen Strom kompensiert. Diesem Ergebnis werden wir in der MHD-Kraftgleichung wieder begegnen.

Polarisationsdrift

Wir wollen nun die Teilchenbewegung in Anwesenheit eines zeitlich veränderlichen elektrischen Feldes untersuchen. Hier ergibt sich zusätzlich zu der oben abgeleiteten $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Drift auch eine Bewegung in Richtung des E -Feldes. Dies kann anschaulich an Hand von Fig. 5.5 verstanden werden. Dabei nehmen wir der Einfachheit halber an, dass \mathbf{E} in der Zeit linear anwächst. Wie bei der $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Drift wird das Teilchen parallel zum E -Feld beschleunigt und abgebremst, wenn es dem E -Feld entgegenreißt. Da nun aber das E -Feld ständig anwächst, kompensieren sich die in x -Richtung zurückgelegten Wegstrecken nicht und es bleibt eine Komponente der Bewegung in Richtung des E -Feldes übrig.

Die Polarisationsdrift kann aus der Bewegungsgleichung hergeleitet werden. Für die Geometrie aus Fig. 5.5 gilt:

$$m\dot{v}_x = qv_y B_z + qE_x \quad (5.17)$$

$$m\dot{v}_y = -qv_x B_z \quad (5.18)$$

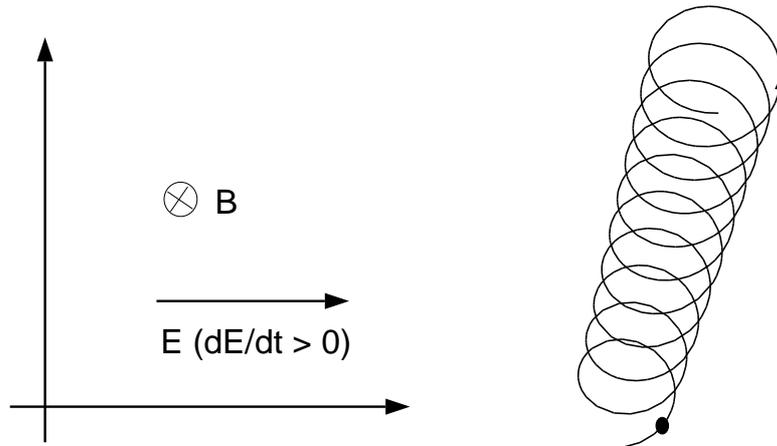


Abbildung 5.5: Zur Veranschaulichung der Polarisationsdrift: Bei zeitlich anwachsendem E -Feld schliessen sich die Gyroradien auch in E -Feldrichtung nicht mehr und zusätzlich zur $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Drift ergibt sich eine Drift in Richtung von \mathbf{E} .

Nochmaliges Ableiten von (5.17) nach der Zeit und Einsetzen von (5.18) liefert

$$m\ddot{v}_x = -\frac{q^2}{m}B_z^2v_x + q\dot{E}_x \quad (5.19)$$

Wir sind nur an der Driftbewegung interessiert, d.h. wir können (5.19) über viele Gyrationen mitteln. Dann verschwindet der Term mit der zweimaligen Zeitableitung (der von der Gyrationenbewegung her stammt) und wir erhalten die Polarisationsdrift:

$$v_x = \frac{m}{qB_z^2}\dot{E}_x \quad (5.20)$$

Da die Geometrie beliebig war, gilt dieses Ergebnis allgemein. Wegen der Ladungsabhängigkeit führt die Polarisationsdrift zu einem Polarisationsstrom. Dieser wird wegen der grossen Ionenmasse im wesentlichen von den Ionen getragen:

$$\mathbf{j}_{pol} = \frac{nm_i}{B^2}\dot{\mathbf{E}}. \quad (5.21)$$

Der Name Polarisationsstrom erklärt sich aus der Analogie zum Polarisationsstrom in den Maxwellgleichungen, welcher auch einer zu $\dot{\mathbf{E}}$ proportionalen Stromdichte entspricht. Der Polarisationsstrom ist wichtig beim Aufbau elektrischer Felder im Plasma. Dies soll im folgenden gezeigt werden:

Wir betrachten einen fiktiven Kondensator, der mit einem magnetisierten Plasma gefüllt sei, wobei das B -Feld parallel zu den Platten verlaufe. Aus der Elektrodynamik wissen wir, dass beim Aufladen eines Kondensators durch die auf die Kondensatorplatten aufgebrauchte freie

Ladung ρ_{frei} die dielektrische Verschiebung \mathbf{D} gemäß $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{frei}$ bestimmt ist. Das elektrische Feld \mathbf{E} im Kondensator bestimmt sich hingegen mit der Dielektrizitätskonstante ϵ zu $\mathbf{E} = \mathbf{D}/(\epsilon_0\epsilon)$. Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung erhalten wir

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{D}} = \dot{\rho}_{frei} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_{frei} = -\nabla \cdot (\mathbf{j} - \mathbf{j}_{geb}) \quad (5.22)$$

wobei der gebundene Strom \mathbf{j}_{geb} gerade durch den Polarisationsstrom gegeben ist. Den Gesamtstrom \mathbf{j} erhalten wir aus der Maxwellgleichung

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{E}} \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{1}{\mu_0 c^2} \nabla \cdot \dot{\mathbf{E}} \quad (5.23)$$

sodass sich Glg. (5.22) wie folgt schreiben lässt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot (\mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E} - \frac{nm_i}{B^2} \mathbf{E}) = 0 \quad (5.24)$$

Aus dieser Gleichung folgt schliesslich für die senkrechte Dielektrizitätskonstante eines magnetisierten Plasmas:

$$\epsilon = 1 + \frac{nm_i}{B^2} = 1 + \frac{c^2}{v_A^2} \quad (5.25)$$

wobei $v_A = B/\sqrt{\mu_0 nm_i}$ die sogenannte Alfvén Geschwindigkeit ist, die uns bei den Wellenphänomenen wieder begegnen wird. Sie ist im allgemeinen klein gegen die Lichtgeschwindigkeit, sodass ϵ sehr große Werte annimmt. Ein magnetisiertes Plasma schirmt daher \mathbf{E} -Felder wirkungsvoll ab. Ladungstrennung führt hauptsächlich zur $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Drift und somit zur Aufnahme kinetischer Energie (d.h. $\dot{\mathbf{E}}$ bewirkt eine Beschleunigung des Plasmas); der Polarisationsstrom schliesst das Feld senkrecht zum Magnetfeld kurz.

Dies sieht man auch an der Energiebilanz:

$$W_{tot} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} nm_i \frac{E^2}{B^2} \quad (5.26)$$

wobei der erste Summand die Energiedichte des \mathbf{E} -Feldes darstellt, der zweite genau die kinetische Energiedichte des Plasmas auf Grund der $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Drift angibt.

∇B Drift

Bisher hatten wir vorausgesetzt, daß das B -Feld zeitlich und räumlich konstant sei. Im allgemeinen Fall $B = f(x, t)$ kann man die Bewegungsgleichung nicht mehr geschlossen lösen. Der Guiding Centre Ansatz bleibt jedoch dann ein guter Ansatz, wenn die Skala der räumlichen bzw. zeitlichen Variation des B -Feldes klein gegen die typischen Skalen der Gyrobewegung sind. Dies ist der Fall, wenn $\nabla B \ll B/r_L$ bzw. $\dot{B} \ll \omega_c B$. Unter dieser Einschränkung können wir die Drift im inhomogenen Magnetfeld durch Gl. (5.11) beschreiben.

Im inhomogenen Magnetfeld erfahren die geladenen Teilchen eine Kraft auf Grund des Gradienten der Feldstärke. In der Atomphysik (Stern-Gerlach-Versuch) hatten wir bereits gesehen, daß sich diese Kraft als

$$\mathbf{F} = -\mu \nabla B \quad \text{mit} \quad B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} \quad (5.27)$$

schreiben läßt, wobei μ das magnetische Moment des Teilchens ist. Es ergibt sich aus dem Produkt des mit der Gyrobewegung verbundenen Kreisstroms und der vom Strom umrandeten Fläche:

$$\mu = IA = q \frac{\omega_c}{2\pi} \pi r_L^2 = q \frac{qB}{2m} \left(\frac{mv_{\perp}}{qB} \right)^2 = \frac{mv_{\perp}^2}{2B} = \frac{E_{kin,\perp}}{B} \quad (5.28)$$

Die Kraft bewirkt eine Drift senkrecht zum Gradienten und zu B mit der Driftgeschwindigkeit

$$v_D = -\frac{mv_{\perp}^2}{2qB^3} \nabla B \times \mathbf{B} \quad (5.29)$$

Anschaulich läuft das Teilchen bei der Gyration in Bereiche unterschiedlicher Magnetfeldstärke und daher variiert der Gyroradius während eines Umlaufes analog zur Darstellung in Fig. 5.3.

Krümmungsdrift

Wegen $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ bedingt ein Gradient der magnetischen Feldstärke im allgemeinen auch eine Krümmung der Feldlinien. Folgen die Teilchen den Feldlinien, so erfahren sie im gekrümmten Magnetfeld auf Grund ihrer Parallelgeschwindigkeit eine Zentrifugalkraft. Bei einer Kreisbewegung ist diese vom Betrag $F = m\omega^2 r = mv_{\parallel}^2/r$; im allgemeinen Fall hat man den Radius r durch R_c , den lokalen Krümmungsradius zu ersetzen. Dies ist der Radius des Schmiegekreises im betrachteten Ortspunkt (siehe Figur 5.6).

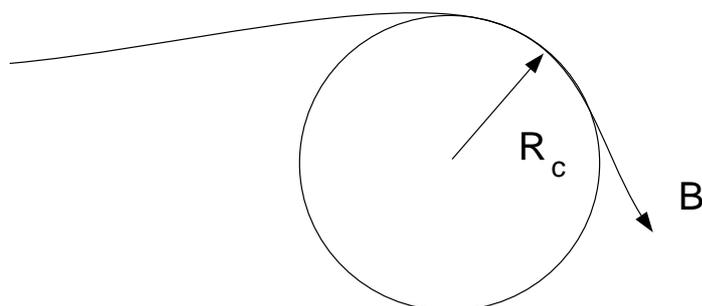
Er berechnet sich im Vakuum ($\nabla \times \mathbf{B} = 0$) zu

$$\frac{1}{R_c} \mathbf{e}_{R_c} = -\frac{\nabla B}{B} \quad (5.30)$$

Die Zentrifugalkraft zeigt also in Richtung von ∇B , so daß man für die sogenannte Krümmungsdrift

$$v_D = -\frac{mv_{\parallel}^2}{qB^3} \nabla B \times \mathbf{B} \quad (5.31)$$

erhält.

Abbildung 5.6: Zur Definition des lokalen Krümmungsradius R_c .**Anwendung: Driften im toroidalen Magnetfeld**

Wir können die ∇B und die Krümmungsdift zusammenfassen:

$$v_D = \frac{m}{qB^3} (v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2}v_{\perp}^2) \mathbf{B} \times \nabla B \quad (5.32)$$

Die gesamte Drift im gekrümmten Magnetfeld ist somit näherungsweise proportional zur kinetischen Energie des Teilchens. Wir untersuchen nun die Drift geladener Teilchen im rein toroidalen Magnetfeld. Dies beschreiben wir, wie in Figur 5.7 dargestellt, in einem Zylinderkoordinatensystem R, ϕ, z .

Das Toroidalfeld ist dann durch $\mathbf{B}_{\phi} = B_0 R_0 / R \mathbf{e}_{\phi}$ gegeben (B_0 sei die Feldstärke im Plasmazentrum $R = R_0$). Für den Gradienten des Feldes erhalten wir so

$$\nabla B = -B_0 \frac{R_0}{R^2} \mathbf{e}_R \quad (5.33)$$

Der Gradient zeigt in R -Richtung, d.h. die Drift erfolgt in z -Richtung. Da die Drift im inhomogenen Magnetfeld nach Gl. (5.32) vom Vorzeichen der Ladung des Teilchens abhängt, driften Elektronen und Protonen in unterschiedliche Richtung. Im Fall von Fig. 5.7 driften die Elektronen nach unten, die Protonen nach oben. Die Driftgeschwindigkeit beträgt für ein typisches Zahlenbeispiel aus der Fusion ($R = 1\text{m}$, $B = 1\text{T}$, $T = 1\text{keV}$) $\approx 1\text{ km/s}$. Wir erhalten so sehr schnell ein elektrisches Feld in z -Richtung. Dieses führt wiederum zu einer $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Drift in R -Richtung. Wie oben angesprochen, führt diese zum radialen Transport des Plasmas aus dem Torus heraus. Im rein toroidalen Magnetfeld können Teilchen also nicht eingeschlossen werden.

Ein effizienter Einschluß geladener Teilchen wird hingegen in toroidaler Geometrie erreicht, wenn zusätzlich zum Toroidalfeld noch eine poloidale Magnetfeldkomponente (z.B. durch einen im Plasma fließenden toroidalen Strom) vorhanden ist. Die Magnetfeldlinien winden

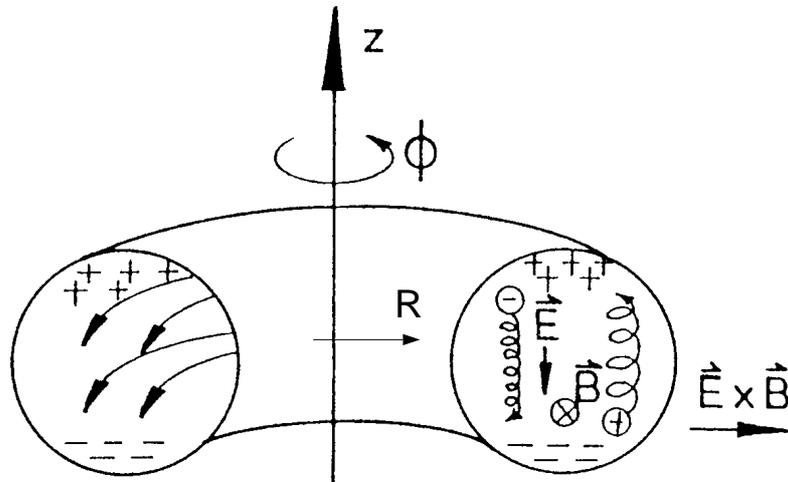


Abbildung 5.7: Teilchendriften im rein toroidalen Magnetfeld. Die Drift im inhomogenen Feld führt zur Ladungstrennung, das resultierende E -Feld transportiert das Plasma über die $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Drift nach außen.

sich dann helikal um die Torusseule herum und spannen sogenannte *magnetische Flächen* auf. Diese sind, wie in Fig. 5.8 dargestellt, ineinander geschachtelt.

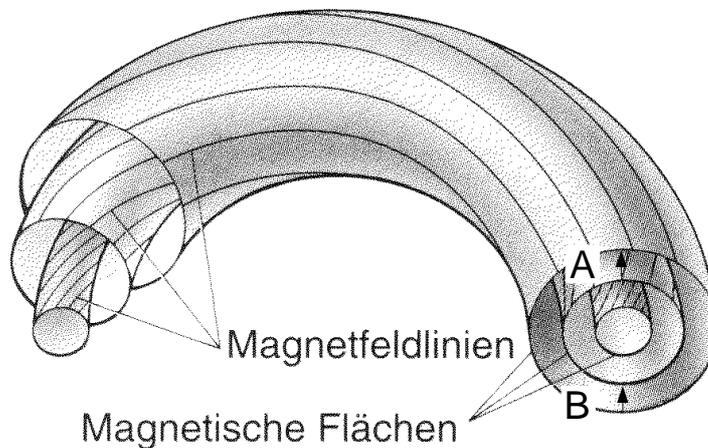


Abbildung 5.8: Magnetische Flächen auf einem Torus, aufgespannt durch Magnetfeldlinien, welche sowohl eine toroidale, als auch eine poloidale Komponente haben.

Der Effekt der Drift im inhomogenen Magnetfeld hebt sich jetzt auf: Wir betrachten ein Proton im Punkt A der Figur 5.8. Auf Grund der Inhomogenität des Magnetfeldes driftet es, wie oben beschrieben, nach oben, d.h. auf eine Feldlinie, welche weiter vom Plasmazentrum ent-

fernt ist. Auf dem Weg längs der Feldlinie kommt das Teilchen in die untere Torushälfte (z.B. Punkt B in Fig. 5.8). Hier driftet es ebenfalls nach oben, dies bedeutet jedoch jetzt eine Drift zum Plasmazentrum, d.h. zurück zur ursprünglichen Feldlinie. Der Nettoeffekt der Drift im inhomogenen Magnetfeld ist also ein Versatz der magnetischen Fläche um ungefähr einen Gyroradius (sog. *Driftfläche*); es kommt jedoch nicht zu nennenswerter Ladungstrennung und damit nicht zur starken Auswärtsdrift.

Wir erhalten also im Einzelteilchenbild das Ergebnis, daß ein effektiver Einschluß von Teilchen im reinen Toroidalfeld nicht möglich ist; vielmehr eignen sich helikal verschraubte Magnetfelder zum Plasmaeinschluß. Dieser Tatsache werden wir bei der Behandlung des Plasma-gleichgewichtes im MHD-Bild wieder begegnen.

5.3 Adiabatische Invarianten

Aus der Mechanik ist bekannt, daß bei einer periodischen Bewegung, zusätzlich zu den Erhaltungsgrößen Energie, Impuls und Drehimpuls, weitere Invarianten der Bewegung vorhanden sind. Diese sind von der Form

$$I = \oint p dq \quad (5.34)$$

wobei q eine verallgemeinerte Koordinate und p der zugeordnete kanonische Impuls $mv + eA$ ist. Das Integral ist über eine Periode der Bewegung auszuführen. Diese Invarianten haben die Dimension einer Wirkung; ihnen kommt häufig eine besondere Bedeutung zu (man denke an die Einführung der Quantenmechanik über die Quantisierung des Wirkungsintegrals). Der besondere Nutzen der durch Gl. (5.34) definierten Invarianten liegt darin, daß sie auch bei einer kleinen Störung der Periodizität erhalten bleiben. Eine kleine Störung ist derart, daß die Periode der Bewegung noch gut definiert ist, obwohl das Teilchen nach einem Umlauf nicht mehr an denselben Punkt im Phasenraum zurückkehrt. Die Invariante wird dann als *adiabatische Invariante* des Systems bezeichnet.

Wir wollen dieses Konzept auf die Bewegung eines Teilchens im Magnetfeld anwenden. Verstehen wir unter der periodischen Bewegung die Kreisbewegung des gyrierenden Teilchens, so bedeutet die Kleinheit der Störung wiederum $\nabla B \ll B/r_L$ bzw. $\dot{B} \ll \omega_c B$. Dann können wir als verallgemeinerte Koordinate die Winkelkoordinate der Gyrationbewegung wählen und der zugehörige Impuls ist der senkrechte Drehimpuls des Teilchens. Wir erhalten also auf der Kreisbahn

$$\oint p dq = \int_0^{2\pi} m\omega_c r_L^2 d\theta = 2\pi m\omega_c r_L^2 = 4\pi \frac{m}{q} \frac{mv_{\perp}^2}{2B} = 4\pi \frac{m}{q} \mu \quad (5.35)$$

Für festes m/q ist also das magnetische Moment μ eine adiabatische Invariante der Bewegung. Man bezeichnet μ auch als erste adiabatische Invariante; weitere Invarianten sollen hier nicht diskutiert werden.

Die adiabatische Invarianz des magnetischen Moments findet eine Anwendung bei der Beschreibung der Teilchenbahnen im sogenannten magnetischen Spiegel. Darunter versteht man die Reflexion eines Teilchens im Gebiet höheren Magnetfeldes: Läuft ein Teilchen in ein Gebiet höherer Magnetfeldstärke, so nimmt wegen der Invarianz des magnetischen Momentes $\mu = mv_{\perp}^2/(2B) = \text{const}$ die Senkrechtenergie $1/2mv_{\perp}^2$ im gleichen Maße wie B zu. Da gleichzeitig Energieerhaltung $1/2m(v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2) = 1/2mv^2 = \text{const}$ gilt, muß v_{\parallel} abnehmen. Das Teilchen wandelt Parallel- in Senkrechtenergie um. Dies kann soweit gehen, daß $v_{\parallel} = 0$ erreicht wird, d.h. die gesamte Parallelenergie in Senkrechtenergie umgewandelt ist. Dann kann das Teilchen nicht weiter in die Richtung höheren Feldes vordringen; die Trajektorie dreht an der sog. *Reflexionsebene* um. Daher spricht man vom *magnetischen Spiegel*. Die Verhältnisse sind in Fig. 5.9 skizziert:

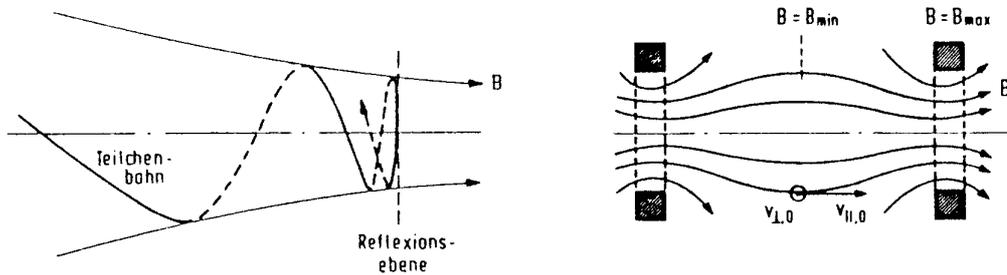


Abbildung 5.9: Teilchenbewegung im magnetischen Spiegel: Reflexion eines Teilchens im Gebiet höherer Feldstärke (links) und Spiegelmaschine zum Plasmaeinschluß (rechts).

Fig. 5.9 zeigt auch eine sogenannte *Spiegelmaschine* zum Plasmaeinschluß. Dies ist eine lineare Anordnung, die, zur Reduktion der Endverluste, magnetische Spiegel als Endverschluß hat. Das Magnetfeld variiert also zwischen B_{min} im Zentrum der Anordnung und B_{max} an den Enden. Wegen der Invarianz des magnetischen Momentes erhöht sich v_{\perp}^2 von $v_{\perp}^2(0)$ im Zentrum der Anordnung auf $B_{max}/B_{min} v_{\perp}^2(0)$ an den Enden. Gespiegelt werden also alle Teilchen, bei denen die Gesamtenergie kleiner als die zur Erhaltung des magnetischen Momentes notwendige Senkrechtenergie ist, d.h.

$$\frac{1}{2}mv_{\perp}^2(0) + \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2(0) < \frac{B_{max}}{B_{min}} \frac{1}{2}mv_{\perp}^2(0) \rightarrow \frac{v_{\parallel}^2(0)}{v_{\perp}^2(0)} < \frac{B_{max}}{B_{min}} - 1 \quad (5.36)$$

Die Größe B_{max}/B_{min} wird auch als Spiegelverhältnis bezeichnet. Teilchen, welche die Ungleichung (5.36) erfüllen, werden gespiegelt und somit eingeschlossen. Die Endverluste werden somit reduziert, können aber, wegen des endlichen Spiegelverhältnisses, nicht vollständig vermieden werden. Analog zu dem in Kap. 2 beschriebenen Plasma-Wandkontakt werden die Elektronen mit ihrer höheren Geschwindigkeit zunächst schneller verloren; dies führt wieder zum Aufbau eines elektrischen Feldes, welches Elektronen zurückweist und Ionen beschleunigt, sodaß der Gesamtverlust elektrisch neutral ist ('ambipolares Feld').

Zusätzlich zu den Endverlusten tritt beim Spiegel eine spezifische Instabilität (sog. *Austausch-Instabilität*) auf, welche auch den radialen Transport (senkrecht zum Magnetfeld) drastisch erhöht; die Spiegelmaschine hat sich daher nicht als Einschlußkonzept durchsetzen können und ist heutzutage von toroidalen Anordnungen verdrängt worden.

Ein magnetischer Spiegel tritt auch bei der Bewegung hochenergetischer geladener Teilchen im Erdmagnetfeld auf. Diese aus dem Sonnenwind stammenden Teilchen können im sogenannten Van-Allen-Gürtel eingefangen werden. Wegen der Zunahme des Feldes zu den Polen hin entsteht ein magnetischer Spiegel, in dem die Teilchen effizient eingeschlossen werden können. Zusätzlich entsteht im inhomogenen Magnetfeld eine Krümmungsdrift, die dazu führt, daß Elektronen und Protonen in entgegengesetzte Richtung um die Erde driften. Die Verhältnisse sind in Fig. 5.10 dargestellt.

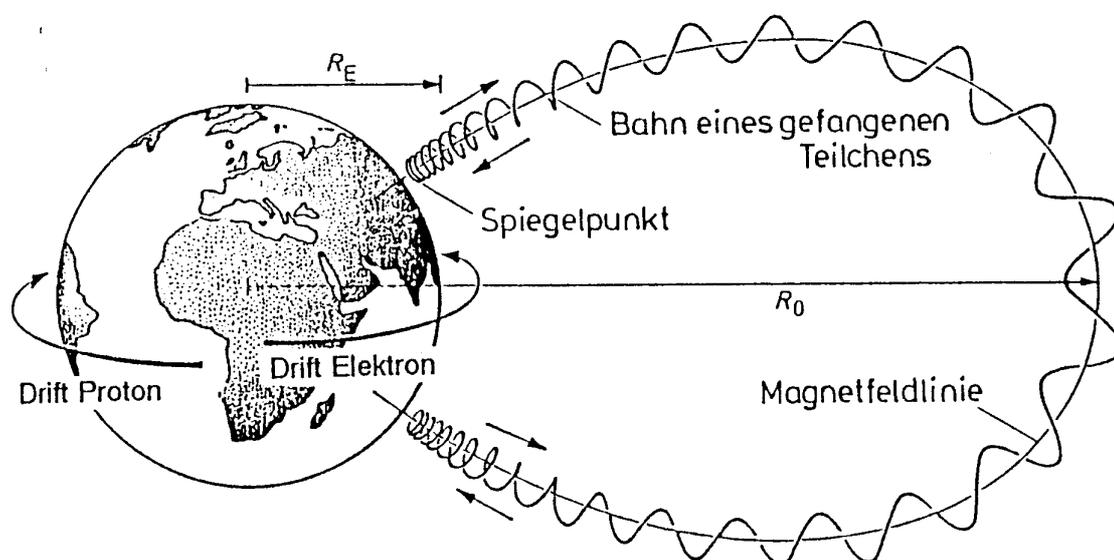


Abbildung 5.10: Teilchenbewegung im Erdmagnetfeld: An den Polen existiert ein magnetischer Spiegel, die Krümmungsdrift führt zu einem Strom in äquatorialer Richtung.

Der so entstehende Strom modifiziert wiederum das Magnetfeld der Erde. Da die Auffüllung des Van-Allen-Gürtels von der Stärke des Sonnenwindes abhängt, variiert das Erdmagnetfeld mit der Aktivität der Sonne (Sonnenflecken). Durch Stöße untereinander können die Teilchen Senkrecht- in Parallelenergie umwandeln und schließlich aus dem Spiegel entkommen; diese Teilchen führen dann beim Eintritt in die Atmosphäre zum Auftreten der Polarlichter.

Eine weitere Bestätigung der Führung geladener Teilchen im Erdmagnetfeld kommt aus Versuchen, bei denen Nuklearwaffen in der Magnetosphäre gezündet wurden: Auf gleicher geographischer Länge wurden dabei nach wenigen Sekunden im Polarbereich künstliche Polarlichter beobachtet. Sie stammten von Teilchen, welche mit ausreichender Parallelenergie erzeugt wurden. Andere Teilchen, welche im Spiegel gefangen wurden, konnten auf Grund der erheb-

lich langsameren Krümmungsdift erst nach einigen Stunden auf gleicher Breite aber anderer Länge nachgewiesen werden.

Ein weiteres Beispiel für kompliziertere Bahnen geladener Teilchen im Magnetfeld findet sich im Tokamak: Wir hatten bereits gesehen, daß auf Grund der Driften im Torus die Driftfläche, auf der sich das Führungszentrum eines geladenen Teilchens bewegt, gegen die magnetische Fläche verschoben ist. Zusätzlich zur Drift existiert im Tokamak jedoch auch ein magnetischer Spiegel: Da das Magnetfeld im Torus nach außen hin mit $1/R$ abfällt, läuft ein Teilchen längs der Feldlinien von außen nach innen in ein Gebiet höherer Feldstärke. Damit existieren im Tokamak neben den auf Driftflächen umlaufenden Teilchen auch sogenannte 'gefangene Teilchen' (englisch *trapped particles*, welche zwischen den Reflexionspunkten hin- und herpendeln. Die Verhältnisse sind in Fig. 5.11 dargestellt:

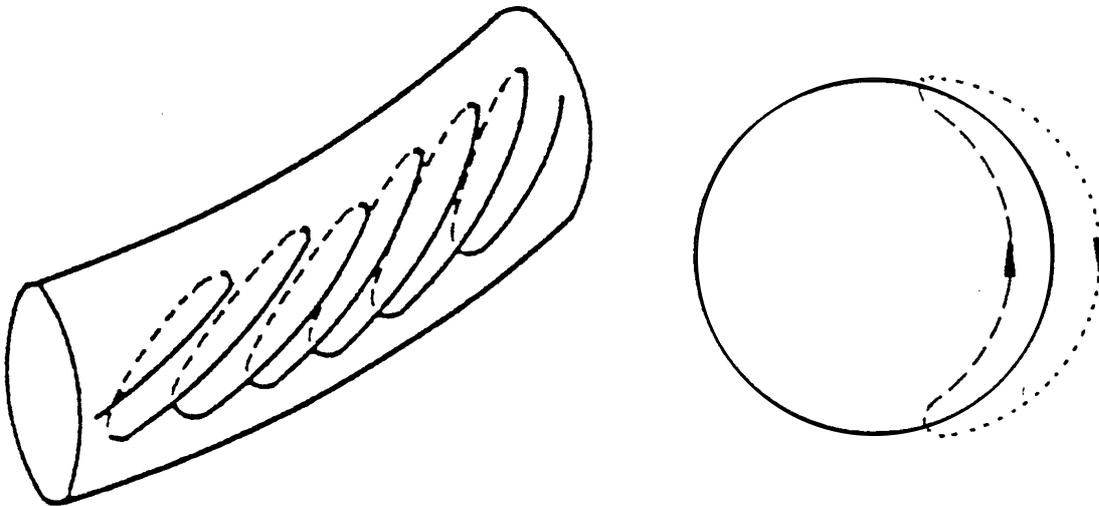


Abbildung 5.11: Teilchenbewegung im Tokamak: Für hinreichen kleines $v_{\parallel}^2/v_{\perp}^2$ wird das Teilchen im Gradienten des B -Feldes reflektiert. Wegen der Drift im inhomogenen Magnetfeld (in der Zeichnung für ein Proton immer nach oben) durchläuft das Teilchen eine sogenannte Bananenbahn.

Wegen der Überlagerung der Krümmungs- und ∇B -Drift ergibt sich als Teilchenbahn der gefangenen Teilchen eine sogenannte 'Bananenbahn': Geht man z.B. von Punkt A in Fig. 5.11 aus, so driftet ein Proton auf dem Weg zur Mittelebene (Punkt B) längs der Feldlinie zunächst von der ursprünglichen magnetischen Fläche weg, jenseits der Mittelebene wieder zur magnetischen Fläche hin. Beim oberen Reflexionspunkt (Punkt C) erreicht das Teilchen die magnetische Fläche. Auf dem Rückweg entfernt es sich wiederum von der magnetischen Fläche, diesmal jedoch nach außen. Wegen der Drift im (wesentlich kleineren) Poloidalfeld, $v_D \propto \nabla B \times \mathbf{B}_p$ schließt sich die Bananenbahn nicht in sich selbst, sondern präzediert, wie in Fig. 5.11 dargestellt, langsam in toroidaler Richtung. Die Projektion der Teilchenbahn auf eine poloidale Ebene ist in Fig. 5.11 dargestellt; von dieser Darstellung leitet sich die Bezeichnung 'Bananenbahn' ab. Die Population gefangener Teilchen spielt eine große Rolle bei der Berechnung der Transportkoeffizienten im Torus; dort werden wir auf dieses Thema zurückkommen.

Kapitel 6

Vielteilchenbeschreibung

Im vorherigen Kapitel hatten wir die Einzelteilchenbeschreibung eines Plasmas kennengelernt. Dabei wurde die Wechselwirkung der Teilchen untereinander vollständig vernachlässigt. Eine exakte Beschreibung würde das simultane Lösen der Bewegungsgleichungen für alle Teilchen (z.B. 10^{20} Stück) erfordern. Besondere Schwierigkeiten bereiten hier die elektromagnetischen Felder, die einerseits auf die Teilchenbewegung einwirken, andererseits aber auch von den geladenen Teilchen erzeugt werden. Im folgenden werden wir zeigen, wie man durch geeignete Näherungen Gleichungen aufstellen kann, welche die Wechselwirkung beinhalten und dennoch zu handhaben sind.

6.1 Kinetische Theorie

In der klassischen Mechanik werden Trajektorien einzelner Teilchen durch Ort und Impuls (bzw. Geschwindigkeit) bestimmt. Im Prinzip kann man Gleichungen für N Teilchen im $6N$ -dimensionalen Raum $d^3x_1 d^3v_1 d^3x_2 d^3v_2 \cdots d^3x_N d^3v_N$ aufstellen. Dieser Ansatz führt zur Liouville-Gleichung, die in der statistischen Mechanik behandelt wird. Um zu einer überschaubareren Formulierung zu kommen, faßt man alle ununterscheidbaren Teilchen einer Sorte α zusammen und beschreibt deren zeitabhängige Dichte im Orts- und Geschwindigkeitsraum durch die sogenannte *Verteilungsfunktion* $\hat{f}_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$:

$$\hat{f}_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3x d^3v = \text{Zahl der Teilchen im Phasenraumelement } d^3x d^3v \text{ zur Zeit } t \quad (6.1)$$

Ist die Teilchenzahl erhalten, so erfolgt die 'Bewegung' dieser Teilchen im 6-dimensionalen Raum so, daß sich die Zahl der Teilchen im Volumenelement nicht ändert: $d\hat{f}_\alpha/dt = 0$. Die zeitliche Ableitung ist hier entlang der Phasentrajektorie zu nehmen, d.h.

$$\frac{d\hat{f}_\alpha}{dt} = \frac{\partial \hat{f}_\alpha}{\partial t} + \nabla \hat{f}_\alpha \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \nabla_{\mathbf{v}} \hat{f}_\alpha \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0 \quad (6.2)$$

wobei $\nabla_{\mathbf{v}}$ der Gradient im Geschwindigkeitsraum ist. Diese Gleichung ist von der Form einer 6-dimensionalen Kontinuitätsgleichung. Mit Hilfe der Bewegungsgleichungen $\dot{x} = v$ und $\dot{v} =$

F/m erhalten wir schließlich

$$\frac{d\hat{f}_\alpha}{dt} = \frac{\partial \hat{f}_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \hat{f}_\alpha + \frac{q}{m} (\hat{\mathbf{E}} + \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{B}}) \nabla_v \hat{f}_\alpha = 0 \quad (6.3)$$

Die hier eingeführten Felder \hat{E}, \hat{B} sind dabei die exakten Felder am Ort der Teilchen. Diese müssen im Prinzip selbstkonsistent aus den Maxwellgleichungen berechnet werden, in die als Quellen die Teilchen eingehen. Um zu einem lösaren System zu kommen, benutzt man den folgenden Ansatz: Die Felder \hat{E} und \hat{B} werden aufgespalten in einen makroskopischen Teil E bzw. B und einen mikroskopischen Teil $\delta E, \delta B$. Da die Wechselwirkung der Teilchen in einem lokalisierten Volumen (z.B. innerhalb der Debye-Kugel) stattfindet, wird sie durch die mikroskopischen Felder bestimmt. Dagegen wird das makroskopische Feld aus den über den Geschwindigkeitsraum gemittelten Größen Strom j und Ladungsdichte ρ an Hand der Maxwellgleichungen berechnet. Diese gemittelten Größen gewinnt man mit einer 'geglätteten' Verteilungsfunktion f_α (man stelle sich z.B. eine Mittelung über die Debye-Kugel vor):

$$\mathbf{j} = \sum_\alpha q_\alpha \int \mathbf{v} f_\alpha d^3v, \quad \rho = \sum_\alpha q_\alpha \int f_\alpha d^3v \quad (6.4)$$

Man erhält so eine geglättete Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \nabla_v f_\alpha = \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{Stoss} \quad (6.5)$$

Dabei enthält die linke Seite lediglich gemittelte Größen, während auf der rechten Seite im sogenannten *Stoßterm* alle mikroskopischen Größen auftreten. Das Problem der Beschreibung der Vielteilchenwechselwirkung ist somit auf die Bestimmung eines Ausdrucks für den Stoßterm verschoben worden. Die Gleichung (6.5) wird auch als *kinetische Gleichung* bezeichnet; je nach Ansatz für den Stoßterm ergeben sich unterschiedliche Formen der kinetischen Gleichung. Auf die rigorose Herleitung eines Gleichungssystems, nach welchem der Stoßterm bestimmt werden kann (BBGKY-Hierarchie), wird hier nicht näher eingegangen.

Für niedrige Teilchendichten wird der Stoßterm klein, und man macht die einfache Näherung $(\partial f_\alpha / \partial t)_{Stoss} = 0$. Die so erhaltene kinetische Gleichung wird als *Vlasov-Gleichung* bezeichnet. Trotz der sehr idealisierten Annahme der völligen Stoßfreiheit findet die Vlasov-Gleichung vor allem Anwendung bei der Beschreibung kinetischer Effekte bei Wellenphänomenen in Plasmen. Dazu löst man das Gleichungssystem bestehend aus der Vlasov-Gleichung sowie den Maxwellgleichungen für die selbstkonsistenten Felder E, B mit ρ, j als Quelle. Das nachfolgende Beispiel soll dies verdeutlichen.

Wir betrachten die in Kap. 2 untersuchte elektrostatische Plasmaschwingung mit Hilfe der Vlasov-Gleichung ohne Magnetfeld. Im Bereich von ω_p können wir die Bewegung der Ionen vernachlässigen und betrachten nur die Verteilungsfunktion der Elektronen. Die elektrostatische Schwingung breitet sich längs der x -Achse aus, d.h. es handelt sich um ein eindimensionales Problem. Weiterhin sei die Störung durch das elektrische Feld klein. Dann können wir $f = f_0 + f_1$ annehmen, wobei f_0 die ungestörte Verteilungsfunktion ist. Mit $E = 0 + E_1$ (im

Gleichgewicht existiert kein E -Feld) erhalten wir in erster Ordnung die Vlasogleichung für die gestörte Verteilungsfunktion

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v_x \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{e}{m_e} E_1 \frac{\partial f_0}{\partial v_x} = 0 \quad (6.6)$$

Wir setzen nun die gestörten Größen als ebene Wellen an (Fourierzerlegung), d.h.

$$E_1 = \tilde{E} e^{i(kx - \omega t)}, \quad f_1 = \tilde{f} e^{i(kx - \omega t)} \quad (6.7)$$

Mit diesem Ansatz erhalten wir

$$f_1 = \frac{ie}{m_e} \frac{1}{\omega - kv_x} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} E_1 \quad (6.8)$$

Das gestörte elektrische Feld E_1 berechnen wir aus der Poissongleichung (2.19) unter Ausnutzung des Ansatzes (6.7):

$$\frac{dE_1}{dx} = ikE_1 = \frac{\rho}{\epsilon_0} = -\frac{e}{\epsilon_0} n_1 = -\frac{e}{\epsilon_0} \int f_1 dv_x \quad (6.9)$$

wobei wir die gestörte Dichte durch die Verteilungsfunktion ausgedrückt haben. Wir können nun in Gl. (6.9) f_1 aus Gl. (6.8) einsetzen und erhalten (nach Kürzen durch E_1 und mit der Definition (2.28) für ω_p)

$$1 = -\frac{\omega_p^2}{n_0 k^2} \int \frac{\partial f_0 / \partial v_x}{\frac{\omega}{k} - v_x} dv_x \quad (6.10)$$

Diese Gleichung gibt eine Beziehung zwischen ω und k an; sie ist daher die Dispersionsrelation für die elektrostatische Schwingung. Das Integral in Gl. (6.10) ist wegen des Pols auf der v_x -Achse nicht einfach auszuwerten. Eine genauere Betrachtung ergibt für den Fall einer Maxwellverteilung von f_0 die Lösung

$$\omega = \omega_p (1 + 3k^2 \lambda_D^2)^{1/2} - i \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_p}{(k \lambda_D)^3} e^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{k^2 \lambda_D^2} + 3)} \quad (6.11)$$

Im Gegensatz zur einfachen, in Kapitel 2 hergeleiteten Beziehung $\omega = \omega_p \neq f(k)$ liegt jetzt für $T \neq 0$ tatsächlich Dispersion, d.h. eine Abhängigkeit der Frequenz von der Wellenlänge vor. Zusätzlich hat ω auch einen Imaginärteil, d.h. es tritt Dämpfung auf, obwohl in der Vlasov Gleichung keine Stöße berücksichtigt wurden. Diese dissipationfreie Dämpfung (die Entropie des Systems bleibt unverändert) wird nach ihrem Entdecker als Landau-Dämpfung bezeichnet. Dieser Effekt kann nur mit Hilfe der kinetischen Theorie richtig beschrieben werden. Er bildet die Grundlage für viele Absorptionsphänomene elektromagnetischer Wellen im Plasma. Für Verteilungsfunktionen, bei denen $\partial f_0 / \partial v_x$ im Bereich der Phasengeschwindigkeit $v_{ph} = \omega/k$ positiv ist, ergibt sich ein positiver Imaginärteil, d.h. die Welle kann Energie aus dem Plasma aufnehmen.

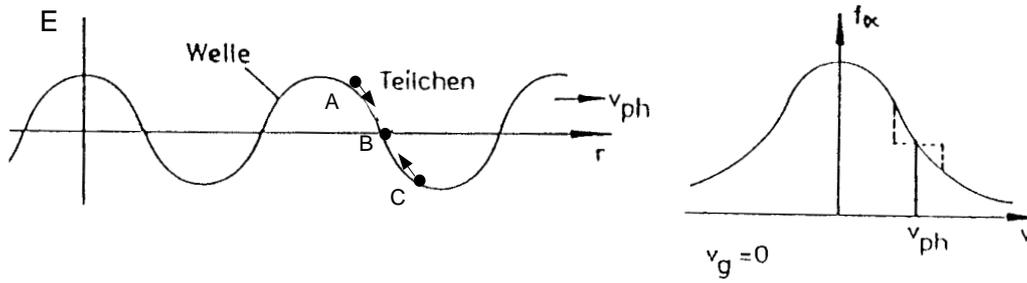


Abbildung 6.1: Landaudämpfung im Bild des Einzelteilchens. Beschleunigung von Teilchen mit $v < v_{ph}$ (A) bzw. Abbremsung solcher mit $v > v_{ph}$ (C) führt zur Abflachung der Verteilungsfunktion bei $v = v_{ph}$. Nur Teilchen mit $v = v_{ph}$ erfahren keine beschleunigende Kraft (B).

Anschaulicher stellt sich die Landaudämpfung im Bezugssystem der Teilchen mit $v \approx v_{ph}$ dar: Ein Teilchen, das sich genau mit der Phasengeschwindigkeit bewegt, sieht im Mittel gerade kein elektrisches Feld. Ein etwas langsames Teilchen wird vom elektrischen Feld beschleunigt, ein schnelleres Teilchen abgebremst. Dies ist in gewisser Weise analog dem Wellenreiter, der mit der Wellengeschwindigkeit mitläuft. Für $(\partial f_0 / \partial v_x)_{v_{ph}} < 0$ werden mehr Teilchen beschleunigt als abgebremst; die Welle überträgt Energie auf die Teilchen (Dämpfung). Die umgekehrte Situation liegt bei $(\partial f_0 / \partial v_x)_{v_{ph}} > 0$ vor. Wie in Fig. 6.1 zu erkennen ist, führt die Landaudämpfung zu einer Abflachung der Verteilungsfunktion im Bereich der Phasengeschwindigkeit.

Berücksichtigt man die Teilchenstöße in der kinetischen Gleichung, so gibt es unterschiedliche Ansätze für den Stoßterm. Unter der Annahme, daß vorwiegend lokalisierte Zweierstöße zur Ablenkung der Teilchenbahnen führen, leitete Boltzmann den nach ihm benannten Stoßansatz her:

$$\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_{Sto\ss} = \int (f_\alpha(v'_\alpha) f_\beta(v'_\beta) - f_\alpha(v_\alpha) f_\beta(v_\beta)) |v_\alpha - v_\beta| \sigma_{\alpha\beta} d^3 v_\beta \quad (6.12)$$

Er beschreibt die Veränderung der Verteilungsfunktion der Teilchensorte α durch Stoß mit der Sorte β , wobei die gestrichelten Größen die Geschwindigkeiten nach dem Stoß darstellen. Der erste Term beschreibt den Zuwachs im Geschwindigkeitselement $d^3 v'_\alpha$, der zweite den Verlust aus dem Element $d^3 v_\alpha$. Setzt man diesen Stoßterm als rechte Seite der kinetischen Gleichung (6.5) an, so ergibt sich die *Boltzmann-Gleichung*. Sie wird z.B. bei der Beschreibung neutraler Gase verwendet.

Im Plasma ist die Annahme lokalisierter Zweierstöße wegen der großen Reichweite des Coulombpotentials nicht erfüllt. Dies führt ähnlich wie bei der Berechnung der Stoßrate in Kap. 3 dazu, daß das Integral in Gl. (6.12) nicht konvergiert. Berücksichtigt man die Abschirmung des Coulombpotentials durch das Plasma, erhält man einen anderen Stoßansatz und kommt zur *Fokker-Planck-Gleichung*. Diese findet bei der kinetischen Beschreibung dissipativer Prozesse im Plasma Anwendung. Im einzelnen ist die mathematische Struktur der Fokker-Planck-

Gleichung recht komplex, man kann jedoch zeigen dass sich der Stoßterm als Summe zweier Beiträge schreiben läßt:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{FP} = -\nabla_v \cdot [\Gamma_R - \nabla_v(Df)] \quad (6.13)$$

Hierbei wurde der Stoßterm als Divergenz eines Impulsflusses im Geschwindigkeitsraum dargestellt. Der erste Term, Γ_R , stellt die Abbremsung auf Grund von Reibung dar und entspricht Glg. (3.15). Der zweite Term beschreibt den Effekt vieler Kleinwinkelstöße (siehe ebenfalls Kap. 3) und entspricht einer Diffusion im Geschwindigkeitsraum mit Geschwindigkeitsdiffusionskoeffizient D . Betrachtet man die Relaxation einer hochenergetischen ($v \gg v_{th}$) Störung im Geschwindigkeitsraum zur Maxwell-Verteilung hin so bewirkt der erste Term eine Bewegung zum Ursprung hin, der zweite eine Isotropisierung, d.h. eine Ausbreitung auf Kreisen um den Ursprung ($v = const.$). Das relative Gewicht der beiden Anteile wird durch die charakteristischen Zeiten für Energie- und Impulsaustausch bestimmt. In Figur 6.2 ist die Relaxation einer δ -förmigen Anfangsstörung hochenergetischer Testteilchen der Masse m durch Stöße mit einer Hintergrundspezies der Masse M dargestellt. Dies entspricht z.B. der Situation der Plasmaheizung durch Einschuss eines Strahls von schnellen Teilchen.

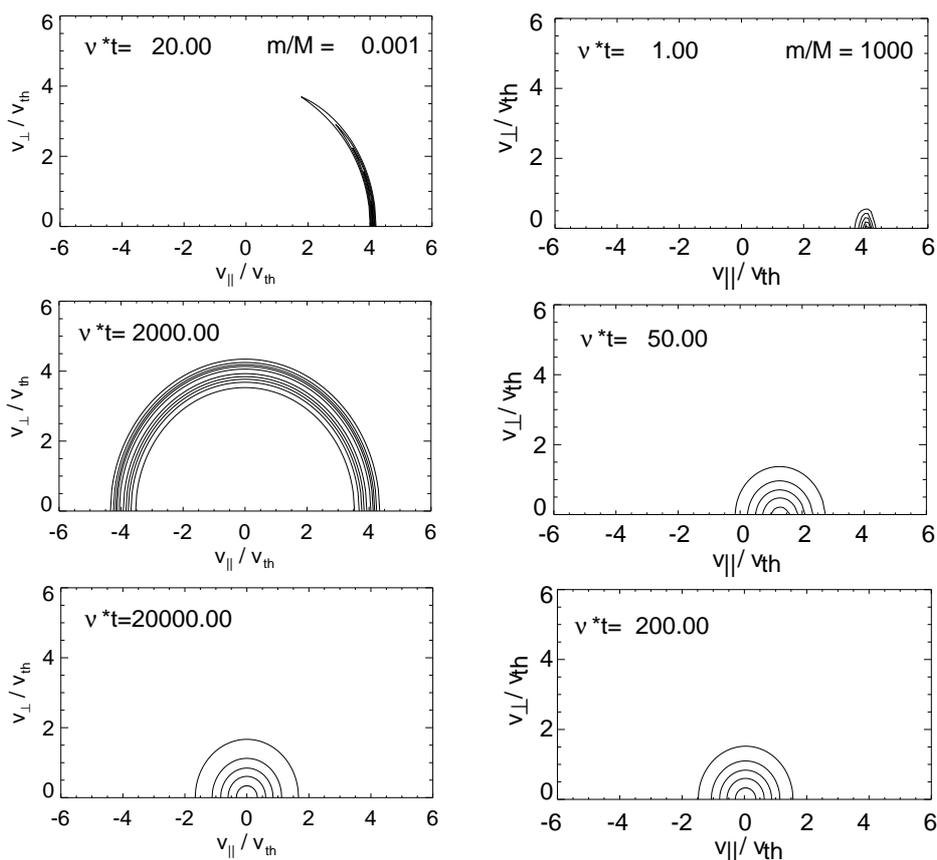


Abbildung 6.2: Abbremsung eines Teilchenstrahls der Masse m an einem Hintergrundplasma der Masse M

Man sieht dass für den Fall der Abbremsung leichter Teilchen an schwereren zunächst eine Isotropisierung einsetzt, während im umgekehrten Fall die Abbremsung dominiert. Letzteres ist konsistent mit unserer Beobachtung aus Kap. 3 dass der Impulsverlust schwerer Teilchen durch Stoß mit leichteren Teilchen wesentlich langsamer geschieht als der von leichten durch Stoß mit schweren ($\tau_{ie} \gg \tau_{ei}$).

6.2 Momentenbildung: Die MHD Gleichungen

Wir wollen nun von der 6-dimensionalen Beschreibung durch die kinetische Gleichung zu einer 3-dimensionalen Beschreibung im Ortsraum übergehen. Dazu bildet man geeignete Momente von \mathbf{v} im Geschwindigkeitsraum, d.h. man betrachtet Integrale der Form

$$\int \mathbf{v}^k f_\alpha(\mathbf{v}) d^3v \quad \text{mit } k = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (6.14)$$

Man erhält so Gleichungen für die Momente im Ortsraum. Diesen lassen sich physikalische Größen zuordnen. Berechnet man die Integrale bis zu $k = 3$, so treten die folgenden Momente auf:

Teilchendichte n_α und Schwerpunktschwindigkeit \mathbf{u}_α ergeben sich zu

$$n_\alpha = \int f_\alpha(\mathbf{v}) d^3v \quad (6.15)$$

$$\mathbf{u}_\alpha = \frac{1}{n_\alpha} \int \mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{v}) d^3v \quad (6.16)$$

Mit Hilfe der Schwerpunktschwindigkeit läßt sich die thermische Geschwindigkeit der Teilchen als $\mathbf{w}_\alpha = \mathbf{v} - \mathbf{u}_\alpha$ ausdrücken. Sie beschreibt den mit thermischen Fluktuationen verbundenen Anteil der Teilchengeschwindigkeit. Somit gilt, wie man mit obiger Definition leicht nachrechnet, für den Mittelwert $\langle \mathbf{w}_\alpha \rangle = 0$. Dies ermöglicht die Definition der Temperatur

$$kT_\alpha = \frac{1}{n_\alpha} \frac{m_\alpha}{3} \int \mathbf{w}_\alpha^2 f_\alpha(\mathbf{v}) d^3v \quad (6.17)$$

Allgemeiner ist mit dem quadratischen Moment der thermischen Teilchenbewegung der Drucktensor \mathbf{P} verknüpft.

$$\mathbf{P}_\alpha = m_\alpha \int \mathbf{w}_\alpha \otimes \mathbf{w}_\alpha f_\alpha(\mathbf{v}) d^3v \quad (6.18)$$

wobei $\mathbf{w}_\alpha \otimes \mathbf{w}_\alpha$ das dyadische Produkt kennzeichnet. Die Spur (Summe der Diagonalelemente) des Drucktensors entspricht dem skalaren Druck:

$$\frac{1}{3}(P_\alpha^{xx} + P_\alpha^{yy} + P_\alpha^{zz}) = p_\alpha = n_\alpha kT_\alpha \quad (6.19)$$

Im thermodynamischen Gleichgewicht sind nur diese Elemente von Null verschieden, d.h. der Druck ist dann *isotrop*.

Ein Moment dritter Ordnung ist der Wärmefluß \mathbf{q}

$$\mathbf{q}_\alpha = \frac{m_\alpha}{2} \int \mathbf{w}_\alpha^2 \mathbf{w}_\alpha f_\alpha(\mathbf{v}) d^3v \quad (6.20)$$

Schließlich treten bei der Integration des Stoßterms Terme auf, die den Impuls- und Energieaustausch zwischen den Teilchensorten α und β beschreiben. Wegen der Erhaltung von Impuls und Energie verschwinden die Integrale des Stoßterms über \mathbf{u}_α und wir haben nur die Integration über \mathbf{w}_α zu berücksichtigen.

Der Impulsaustausch führt zur Reibungskraft $\mathbf{R}_{\alpha\beta}$

$$\mathbf{R}_{\alpha\beta} = m_\alpha \int \mathbf{w}_\alpha \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{Stoss} d^3w_\alpha \quad (6.21)$$

Wegen *actio = reactio* ist $\mathbf{R}_{\alpha\beta} = -\mathbf{R}_{\beta\alpha}$.

Der Wärmeaustausch durch Stöße wird durch den Wärmetransfer $Q_{\alpha\beta}$ beschrieben:

$$Q_{\alpha\beta} = \frac{m_\alpha}{2} \int \mathbf{w}_\alpha^2 \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{Stoss} d^3w \quad (6.22)$$

Mit diesen Größen gewinnt man nun durch Integration der mit v^k multiplizierten kinetischen Gleichung (6.5) Gleichungen im Ortsraum. Mit diesen Gleichungen läßt sich das Plasma wie eine Flüssigkeit beschreiben; man bezeichnet das Verfahren daher auch als *magnetohydrodynamische* (MHD) Beschreibung. Für $k < 3$ ergeben sich die folgenden MHD Gleichungen:

Integration der kinetischen Gleichung ($k = 0$) ergibt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = 0 \quad (6.23)$$

Sie besagt, daß bei Teilchenzahlerhaltung in einem infinitesimalen Volumen Änderungen der Teilchendichte durch die Divergenz des Teilchenstromes $n_\alpha \mathbf{u}_\alpha$ bedingt sind.

Integration der mit $m_\alpha \mathbf{v}$ multiplizierten kinetischen Gleichung (d.h. $k = 1$) ergibt die Kraftgleichung

$$m_\alpha n_\alpha \left(\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{u}_\alpha \right) - q_\alpha n_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) + \nabla \cdot \mathbf{P}_\alpha = \mathbf{R}_{\alpha\beta} \quad (6.24)$$

Diese Gleichung besagt, daß die Beschleunigung eines Volumenelementes gerade durch die Summe der äußeren Kräfte gegeben ist. In der Hydrodynamik ist sie als Eulergleichung bekannt. In Gl. (6.24) wurde die zeitliche Ableitung im ortsfesten System ausgedrückt. Zeitliche Änderung einer Größe kann somit sowohl durch explizite Zeitabhängigkeit ($\partial/\partial t$), als auch durch Strömen mit der Flüssigkeit ($\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla$) bewirkt werden. Diese sogenannte *konvektive Ableitung* erhält man auch aus dem totalen Differential:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla \quad (6.25)$$

Multiplikation der kinetischen Gleichung mit $1/2mv^2$ (d.h. $k = 2$) ergibt die Energiegleichung

$$\frac{3}{2} n_\alpha k \frac{dT_\alpha}{dt} + (\mathbf{P}_\alpha \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u}_\alpha + \nabla \cdot \mathbf{q}_\alpha = Q_{\alpha\beta} \quad (6.26)$$

Eine Betrachtung der Momentengleichungen zeigt, daß das Gleichungssystem nicht geschlossen ist: In der k -ten Momentengleichung taucht jeweils ein $k + 1$ -tes Moment auf. Um zu einem geschlossenen System zu kommen, muß man daher weitere Annahmen machen. Bricht man z.B. bei $k = 1$ ab, so muß eine Gleichung für den Drucktensor hinzugenommen werden.

Für ein Wasserstoffplasma kann man das System der zwei Flüssigkeiten (Ionen und Elektronen) zu einer Flüssigkeit zusammenfassen. Dazu definiert man die Massendichte ρ , die Schwerpunktschwindigkeit \mathbf{v} und die elektrische Stromdichte \mathbf{j} gemäß

$$\rho = m_i n_i + m_e n_e \approx m_i n \quad (6.27)$$

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\rho} (m_i n_i \mathbf{u}_i + m_e n_e \mathbf{u}_e) \approx \mathbf{u}_i \quad (6.28)$$

$$\mathbf{j} = en(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) \quad (6.29)$$

wobei wir die Quasineutralität ($n_i = n_e = n$) und $m_e \ll m_i$ ausgenutzt haben.

In diesem Einflüssigkeitsmodell ergibt sich die Kontinuitätsgleichung als

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (6.30)$$

Addition der Kraftgleichungen für Elektronen und Ionen ergibt

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla \cdot \mathbf{P} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (6.31)$$

mit $\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_e = \mathbf{P}$. Wegen $\mathbf{R}_{ei} = -\mathbf{R}_{ie}$ taucht die Reibung nicht mehr auf.

Eine weitere Gleichung ergibt sich, wenn man die Kraftgleichung der Elektronen durch die Einflüssigkeitsvariablen ausdrückt:

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\sigma} \mathbf{j} + \frac{1}{en} (\mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p_e) \quad (6.32)$$

wobei wir nur den isotropen Anteil des Elektronendrucktensors berücksichtigt haben. Die Reibungskraft \mathbf{R}_{ei} führt zum elektrischen Widerstand; das resultierende elektrische Feld wurde über die Beziehung $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ eingeführt. Die Gleichung (6.32) ist die Bestimmungsgleichung für das elektrische Feld im Plasma, sie wird daher als *verallgemeinertes Ohmsches Gesetz* bezeichnet. Zusammen mit den Maxwellgleichungen für \mathbf{E} und \mathbf{B} bilden die Gleichungen (6.30) bis (6.32) das System der *Einflüssigkeitsgleichungen* der MHD. Mit ihm kann das makroskopische Verhalten eines Plasmas beschrieben werden.

6.2.1 Einfache MHD Gleichgewichte

Eine Anwendung der oben hergeleiteten MHD-Gleichungen besteht in der Berechnung von MHD-Gleichgewichten, d.h. von Konfigurationen, in denen ein Plasma im Kräftegleichgewicht ist. Fordern wir zusätzlich zu $\partial/\partial t \rightarrow 0$ auch noch $\mathbf{v} = 0$, so verschwindet die linke Seite der Kraftgleichung (6.31) und wir erhalten (für isotropen Druck)

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (6.33)$$

Diese Gleichung ist uns bereits bei der Betrachtung des diamagnetischen Stromes begegnet. Sie besagt, daß im Gleichgewicht ein Strom senkrecht zu den magnetischen Feldlinien die durch den kinetischen Druck auf das Volumenelement ausgeübte Kraft bilanziert.

Mit Hilfe des Ampèreschen Gesetzes $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ kann diese Gleichung umgeformt werden:

$$\nabla p = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \nabla B - \nabla \left(\frac{B^2}{2} \right)) \rightarrow \nabla_{\perp} \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{B^2}{\mu_0 R_c} \mathbf{e}_{R_c} = 0 \quad (6.34)$$

Danach kann das Magnetfeld auf zweierlei Art kinetischen Druck bilanzieren: Senkrecht zu den Magnetfeldlinien wird der *magnetische Druck* $B^2/2\mu_0$ ausgeübt. Der zweite Term beschreibt die *Feldlinienspannung*, d.h. die Auslenkung gerader Feldlinien übt über die Krümmung eine Kraft in Richtung des Krümmungsradius aus.

Wir wollen für einfache lineare Anordnungen MHD-Gleichgewichte berechnen. Ein Beispiel für eine solche Anordnung ist der sog. z-Pinch, d.h. ein zylindrisches Plasma, an dessen Enden eine Spannung anliegt. Dadurch fließt ein Strom j_z . Dieser erzeugt ein Magnetfeld B_{θ} ; die Kraft $j_z \times B_{\theta}$ bilanziert den radialen Druckgradienten dp/dr . Die Verhältnisse veranschaulicht Fig. 6.3.

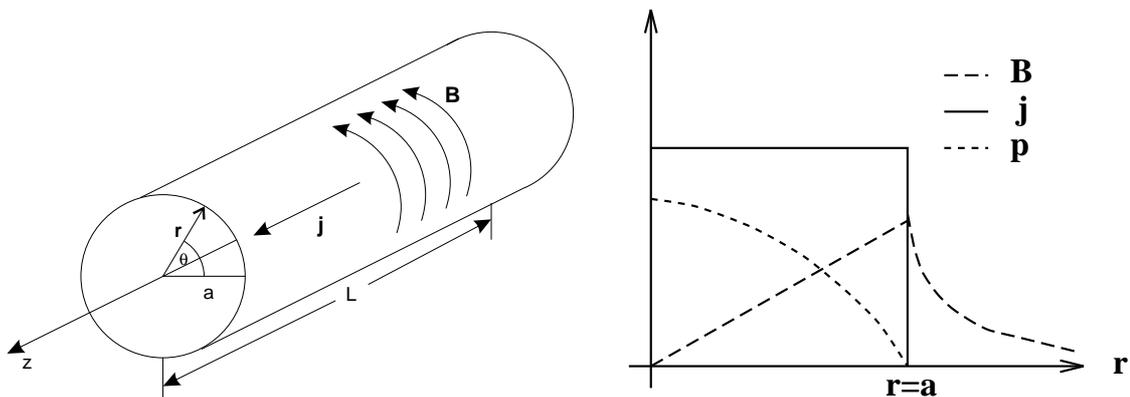


Abbildung 6.3: Schematische Anordnung des z-Pinches (links) und typische Profile.

Das Ampèresche Gesetz liefert die θ -Komponente des Magnetfelds:

$$\frac{1}{\mu_0 r} \frac{d}{dr} (r B_\theta) = j_z \quad (6.35)$$

Die Kraftgleichung kann damit wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{dp}{dr} = -j_z B_\theta = -\frac{1}{\mu_0 r} B_\theta \frac{d}{dr} (r B_\theta) = -\frac{B_\theta^2}{\mu_0 r} - \frac{d}{dr} \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} \quad (6.36)$$

Im z -Pinch wird also der Plasmadruck sowohl durch magnetischen Druck als auch durch Feldlinienspannung (im Zylinder entspricht r gerade dem Krümmungsradius) bilanziert. Spezifiziert man ein Stromprofil, so kann man mit den Gleichungen (6.35) und (6.36) die Profile von B_θ und p berechnen. Für den Fall einer konstanten Stromdichte $j_z = I_p/(\pi a^2)$ (a ist der Plasmaradius) ergeben sich die in Fig. 6.3 dargestellten Profile:

$$B_\theta(r) = \frac{\mu_0 I_p}{2\pi a^2} r \quad \text{falls } r \leq a \quad (6.37)$$

$$B_\theta(r) = \frac{\mu_0 I_p}{2\pi r} \quad \text{falls } r > a \quad (6.38)$$

$$p = \frac{\mu_0 I_p^2}{4\pi^2 a^2} \left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right) \quad (6.39)$$

Der Druck im Plasma ist also experimentell durch den Wert des Plasmastroms I_p festgelegt. Die Effizienz des Einschlusses läßt sich durch die dimensionslose Größe β , das Verhältnis von gemitteltem kinetischem Druck p und magnetischem Druck $B^2/(2\mu_0)$ beschreiben:

$$\beta_\theta = \frac{2\mu_0 \langle p \rangle}{B_\theta^2(a)} \quad (6.40)$$

Für den z -Pinch ergibt sich $\beta_\theta = 1$, d.h. kinetischer und magnetischer Druck sind gleich.

In der Praxis zeigt sich jedoch, daß der z -Pinch eine instabile Konfiguration ist. Die Plasmasäule kontrahiert sich und reißt innerhalb kurzer Zeit ab. Dieser Kontraktion kann durch ein extern erzeugtes axiales Feld B_z entgegengewirkt werden. Die Krümmung des z -Feldes bei der Kontraktion erzeugt eine entgegengerichtete Kraft, welche stabilisierend wirkt. Man gelangt so zum *Screw-Pinch*, in dem die Addition von B_θ und B_z zu helikal verschraubten Feldlinien führt. Eine solche Konfiguration ist in Fig. 6.4 dargestellt.

Die Berechnung des MHD-Gleichgewichtes für den Screw-Pinch erfolgt analog zum z -Pinch. Im Ampèreschen Gesetz müssen nun die Felder B_θ und B_z berücksichtigt werden:

$$-\frac{1}{\mu_0} \frac{dB_z}{dr} = j_\theta \quad (6.41)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \frac{d}{dr} (r B_\theta) = j_z \quad (6.42)$$

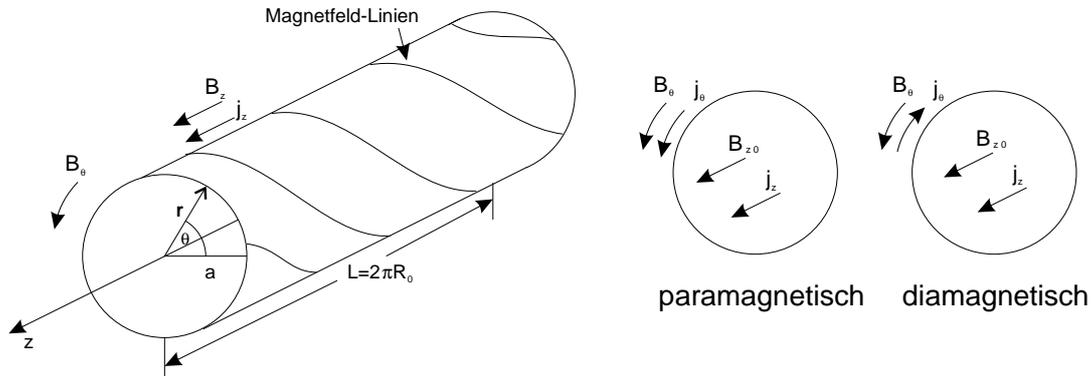


Abbildung 6.4: Schematische Anordnung des Screw-Pinches (links) und zur radialen Kraftbilanz beitragende Ströme.

Das axiale Magnetfeld B_z setzt sich somit aus dem extern erzeugten Magnetfeld $B_{z0} = \text{const}$ und dem im Plasma durch j_θ erzeugten Magnetfeld zusammen. Einsetzen des Magnetfeldes in die Kraftgleichung liefert nun

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{d}{dr} \left(\frac{B_\theta^2 + B_z^2}{2\mu_0} \right) - \frac{B_\theta^2}{\mu_0 r} \quad (6.43)$$

Im Experiment sind der extern erzeugte Anteil B_{z0} und j_z vorgegeben. Der im Plasma fließende Strom j_θ kann über $j_\theta B_z$ zur Kraftbilanz beitragen. Dieser Strom und der damit verbundene Beitrag zum axialen Feld B_z ist jedoch nicht direkt experimentell vorgegeben. Daher ist p eine freie Größe. Wir haben also durch die Addition des axialen Feldes einen weiteren Freiheitsgrad gewonnen. Damit kann im Experiment bei festem I_p der Druck variiert werden (z.B. durch die im Plasma deponierte Heizleistung). Je nach Größe des Druckes variiert das Vorzeichen von j_θ :

- Ist der Druckgradient kleiner als der durch $j_z B_\theta$ vorgegebene Wert, so ist $j_\theta B_z$ antiparallel zu $j_z B_\theta$. Die Effizienz des Einschlusses ist dann kleiner als im z -Pinch, d.h. $\beta_\theta < 1$. Wie in Fig. 6.4 dargestellt, ist das von j_θ erzeugte Feld dann dem externen Feld $B_z(0)$ parallel, d.h. das Plasma reagiert *paramagnetisch*.
- Ist der Druckgradient größer als der durch $j_z B_\theta$ vorgegebene Wert, so ist $j_\theta B_z$ parallel zu $j_z B_\theta$. Die Effizienz des Einschlusses ist dann größer als im z -Pinch, d.h. $\beta_\theta > 1$. In diesem Fall reagiert das Plasma *diamagnetisch*.

Der Einschluß im Screw-Pinch bietet somit experimentelle Flexibilität beim Plasmaeinschluß. Das größte experimentelle Problem bleiben die hohen Endverluste durch Wärmeleitung längs

der Feldlinien. Daher geht man vom linearen Screw-Pinch zur toroidalen Anordnung mit verschraubten Feldlinien über. Wir werden auf diese Art des Gleichgewichtes bei der Behandlung des Tokamaks zurückkommen.

6.2.2 Der 'eingefrorene Fluß'

Mit Hilfe der MHD Gleichungen läßt sich für den Fall unendlicher Leitfähigkeit ($\sigma \rightarrow \infty$, 'ideale MHD') ein wichtiger Satz beweisen. Das ohmsche Gesetz lautet dann

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{1}{en_e} (\mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p_e) \quad (6.44)$$

Betrachtet man eine Schleife C , die gegen den Plasmaschwerpunkt mit der Geschwindigkeit \mathbf{u} durch das Plasma bewegt wird, so erhält man für die Änderung des magnetischen Flusses $\Psi = \int \mathbf{B} d\mathbf{A}$ durch die Schleife

$$\frac{d\Psi}{dt} = \int \partial_t \mathbf{B} d\mathbf{A} - \int \mathbf{u} \times \mathbf{B} d\ell \quad (6.45)$$

Der erste Term auf der rechten Seite ist ein Flächenintegral über die Schleife und berücksichtigt die Flußänderung auf Grund der Änderung des B-Feldes, der zweite ein Umlaufintegral, das die Flußänderung auf Grund der Bewegung der Schleife senkrecht zum (inhomogenen) Magnetfeld berücksichtigt. Ersetzt man nun in Gl. (6.45) $\partial_t \mathbf{B}$ nach dem Faradayschen Gesetz durch $-\nabla \times \mathbf{E}$ und benutzt für E das verallgemeinerte Ohm'sche Gesetz (6.44), so kann man den ersten Summanden auf der rechten Seite von (6.45) mit dem Stokes'schen Satz in ein Umlaufintegral umwandeln und erhält schließlich

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \int (\mathbf{v} - \frac{1}{en_e} \mathbf{j} - \mathbf{u}) \times \mathbf{B} d\ell \quad (6.46)$$

Dies bedeutet nun aber, daß der magnetische Fluß durch die Schleife konstant bleibt, wenn man diese mit der Geschwindigkeit

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \frac{1}{en_e} \mathbf{j} = \mathbf{v}_i - (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) = \mathbf{v}_e \quad (6.47)$$

bewegt. Der Umkehrschluß liefert dann, daß sich eine bestimmte Feldlinientopologie mit der Geschwindigkeit \mathbf{u} bewegt. Diese ist nun gerade die Elektronengeschwindigkeit; man spricht daher davon, daß die Magnetfeldlinien im Elektronengas 'eingefroren' seien.

Dieser Satz hat Konsequenzen für die in der idealen MHD zulässigen Bewegungen des Plasmas: Nur solche Strömungen, bei denen sich die Topologie der Feldlinien nicht ändert, sind zugelassen. Also kann sich in der idealen MHD eine Plasmasäule zwar kontrahieren, nicht aber abreißen. Ein Beispiel zeigt Fig. 6.5. Zur Beschreibung des Abreißen ist die Berücksichtigung der Resistivität notwendig: nur dann kann sich die Topologie ändern ('Rekonnektion' von Feldlinien). Darauf werden wir ausführlich bei der Behandlung der MHD-Instabilitäten zurückkommen.

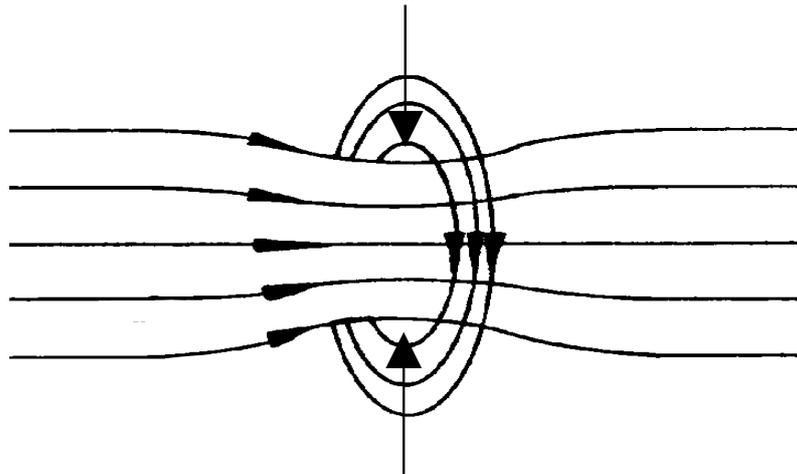


Abbildung 6.5: Kontraktion einer Plasmasäule unter Flußerhaltung.

Bei der Kontraktion erhöht sich das Magnetfeld wegen der Flußerhaltung: Verringert sich die Querschnittsfläche von F_1 zu F_2 , so gilt ungefähr $B_2 = B_1 F_1 / F_2$. Dieser Mechanismus wird auch für die extrem hohen Magnetfelder (bis zu 10^8 T) in den Neutronensternen verantwortlich gemacht: Bei der Kontraktion eines Sterns zum Neutronenstern ist der magnetische Fluß innerhalb des Sterns wegen der hohen Temperaturen praktisch eingefroren, das Magnetfeld kann so um mehrere Größenordnungen erhöht werden. Nimmt man z.B. einen Radius von $r_2 = 20$ km für den Neutronenstern und $r_1 = 696000$ km (Sonnenradius) an, so erhöht sich das Magnetfeld um den Faktor $r_1^2 / r_2^2 \approx 10^9$.

Kapitel 7

Wellen im Plasma

Im einem neutralen Gas gibt es keine freien Ladungsträger. Es existieren daher im wesentlichen zwei unterschiedliche Arten von Wellen:

- Elektromagnetische Wellen: Wie aus der Elektrodynamik bekannt, können die Maxwellgleichungen im Vakuum zu einer Wellengleichung umgeformt werden. Die Lösung dieser Gleichung sind die bekannten elektromagnetischen Wellen, bei denen die Vektoren \mathbf{E} und \mathbf{B} sowohl senkrecht aufeinander als auch senkrecht zum Wellenzahlvektor \mathbf{k} , d.h. zur Ausbreitungsrichtung orientiert sind. Es handelt sich also um eine *Transversalwelle*. Die Phasengeschwindigkeit der Welle ist die Lichtgeschwindigkeit: $v_{ph} = \omega/k = c$.
- Schallwellen: Die Kompression idealer Gase ruft eine rücktreibende Kraft hervor, daher kann es zu Schallwellen kommen. Diese ergeben sich zum Beispiel aus den entsprechenden Flüssigkeitsgleichungen, d.h. durch die Kombination von Kraftgleichung und Kontinuitätsgleichung. Hier ist $\mathbf{k} \parallel \nabla p$; es handelt sich um eine *Longitudinalwelle*. Die Phasengeschwindigkeit ist die Schallgeschwindigkeit $c_s = \sqrt{\gamma k_B T / m}$, wobei γ der Adiabatenkoeffizient ist und m die Atom- oder Molekülmasse bezeichnet. Die Schallgeschwindigkeit ist damit im wesentlichen die thermische Geschwindigkeit.

Im Plasma haben wir es dagegen mit freien Ladungsträgern zu tun; daher koppelt die Teilchenbewegung an das elektromagnetische Feld. Zusätzlich kann ein externes Magnetfeld die Teilchenbewegung senkrecht dazu stark beschränken. Aus diesem Grund existiert in einem Plasma ein ganzer 'Zoo' von Wellenphänomenen. Wir werden diese im Rahmen der Zweiflüssigkeitstheorie (MHD) beschreiben. Wir haben bereits gesehen, daß die kinetische Beschreibung das so erhaltene Bild nochmals verändern kann (z.B. durch die Landaudämpfung); auf diese Effekte wollen wir aber hier nicht eingehen.

7.1 Die linearisierten Wellengleichungen

Ausgangspunkt der Beschreibung sind die MHD-Gleichungen im Zweiflüssigkeitsbild. Ähnlich der Vorgehensweise bei der Herleitung der Landaudämpfung führen wir wieder eine

Linearisierung der Gleichungen durch. Formal kann dies immer geschehen, indem man die Größe f in eine Taylorreihe um die Gleichgewichtswerte entwickelt. Dies kann z.B. durch einen Kleinheitsparameter ε dargestellt werden:

$$f = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 f_3 \dots \quad (7.1)$$

Geht man mit diesem Ansatz in eine Gleichung, so erkennt man nach Ausmultiplizieren die Terme einer bestimmten Ordnung an der Potenz des Kleinheitsparameters. Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen müssen dann die Terme in jeder Ordnung separat die Gleichung erfüllen. Beim Linearisieren berücksichtigt man nur die Terme erster Ordnung, d.h. linear in ε .

Beim Linearisieren der MHD-Gleichungen setzen wir an, daß im Gleichgewicht (d.h. nullte Ordnung) nur \mathbf{B}_0 , $p_{\alpha 0}$ und $n_{\alpha 0}$ von Null verschieden sind, d.h. $\mathbf{E}_0 = \mathbf{u}_{\alpha 0} = 0$. Weiterhin gilt wegen der Quasineutralität für $Z = 1$: $n_{e0} = n_{i0} = n_0$. Abweichungen von der Quasineutralität treten somit erst in der ersten Ordnung auf. Im folgenden werden wir den Index 1 unterdrücken und nur den Index 0 für die Gleichgewichtswerte verwenden. Damit erhalten wir die linearisierte Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} = -n_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha \quad (7.2)$$

Sie beschreibt die zeitliche Entwicklung einer Dichtestörung. Die linearisierte Kraftgleichung ergibt sich zu

$$n_0 m_\alpha \frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} = n_0 q_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}_0) - \nabla p_\alpha \quad (7.3)$$

An dieser Stelle müssen wir eine Annahme über die Änderung von Dichte und Temperatur bei einer Kompression machen. Für eine schnelle Kompression, bei der sich die Entropie nicht ändert (d.h. keine Wärme an die Umgebung abgegeben wird), können wir das Adiabatengesetz annehmen:

$$\nabla p_\alpha = \gamma_\alpha k_B T_{\alpha 0} \nabla n_\alpha \quad (7.4)$$

Hier taucht wieder der Adiabatenkoeffizient γ_α auf; er berechnet sich zu $\gamma_\alpha = (f_\alpha + 2)/f_\alpha$, wobei f_α die Zahl der Freiheitsgrade der Spezies α ist. Diese kann durchaus variieren; für ein ideales Plasma erhalten wir das vom neutralen Gas bekannte Ergebnis $f_\alpha = (3 + 2)/3 = 5/3$. Weitere Gleichungen ergeben sich aus den linearisierten Maxwellgleichungen. Für die Beschreibung von Wellenphänomenen ist es wieder günstig, die Größen erster Ordnung in der Form einer ebenen Welle $f_1 = f \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t))$ anzusetzen. Im linearisierten Gleichungssystem entspricht dies einer Fouriertransformation in Ort und Zeit. Mit diesem Ansatz erhalten wir

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7.5)$$

Das Magnetfeld ist also auch im Plasma immer senkrecht zur Ausbreitungsrichtung orientiert. Für das elektrische Feld ist das im allgemeinen nicht so:

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = \frac{e}{\epsilon_0}(n_i - n_e) \quad (7.6)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} \quad (7.7)$$

Demnach ist die transversale Komponente von \mathbf{E} mit der zeitlichen Änderung des Magnetfeldes verknüpft, während durch die von Null verschiedene Ladungsdichte jetzt auch eine longitudinale Komponente von \mathbf{E} existieren kann.

Mit dem Faradayschen Gesetz können wir nun das linearisierte und fouriertransformierte Ampèresche Gesetz umschreiben und erhalten so die Wellengleichung

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = -i\omega\mu_0 n_0 e(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) \quad (7.8)$$

Diese unterscheidet sich durch ihre von Null verschiedene rechte Seite von der entsprechenden Wellengleichung im Vakuum.

Wir wenden jetzt die Fouriertransformation auch auf die MHD-Gleichungen an. Damit erhalten wir Gleichungen, welche die Gasdynamik des Plasmas beschreiben. Mit der Kontinuitätsgleichung

$$\omega n_\alpha = n_0 \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_\alpha \quad (7.9)$$

können wir die fouriertransformierte Kraftgleichung umschreiben:

$$m_\alpha \omega \mathbf{u}_\alpha = iq_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}_0) + \gamma_\alpha \frac{k_B T_{\alpha 0}}{\omega} \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_\alpha) \quad (7.10)$$

Wir haben somit ein Gleichungssystem erhalten, mit dem wir die Ausbreitung von Wellen im Plasma beschreiben können. Um die Gleichungen auf ihre endgültige Form zu bringen, führen wir jetzt noch die bereits bekannten charakteristischen Frequenzen $\omega_{p\alpha} = \sqrt{n_0 q_\alpha^2 / (\epsilon_0 m_\alpha)}$ (Plasmafrequenz) und $\omega_{c\alpha} = |q_\alpha| B_0 / m_\alpha$ (Zyklotronfrequenz) sowie die Schallgeschwindigkeit $c_\alpha = \sqrt{\gamma_\alpha k_B T_{\alpha 0} / m_\alpha}$ ein. Diese sind alle durch die Gleichgewichtsplasmaparameter (d.h. Größen nullter Ordnung) bestimmt und somit in den Gleichungen als konstant aufzufassen. Schließlich wollen wir das Gleichgewichtsmagnetfeld normieren: $\mathbf{b} = \mathbf{B}_0 / |\mathbf{B}_0|$. Das Gleichungssystem schreibt sich dann (mit $\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) - k^2 \mathbf{E}$ und $c^2 = 1/(\mu_0 \epsilon_0)$) als

$$\left(1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2}\right) \mathbf{E} + \frac{c^2}{\omega^2} \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) = -i \frac{\omega_{pe}^2 m_e}{\omega} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) \quad (7.11)$$

$$\mathbf{u}_i - i \frac{\omega_{ci}}{\omega} \mathbf{u}_i \times \mathbf{b} - \frac{c_i^2}{\omega^2} \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_i) = i \frac{e}{\omega m_i} \mathbf{E} \quad (7.12)$$

$$\mathbf{u}_e + i \frac{\omega_{ce}}{\omega} \mathbf{u}_e \times \mathbf{b} - \frac{c_e^2}{\omega^2} \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_e) = -i \frac{e}{\omega m_e} \mathbf{E} \quad (7.13)$$

Wir haben somit ein System von 3 Vektorgleichungen für die 3 unbekanntenen Vektoren \mathbf{E} , \mathbf{u}_i und \mathbf{u}_e . Das System ist damit in sich geschlossen. Nach Lösen der Gleichungen können wir die restlichen Größen erster Ordnung mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung (für die Dichten) und des Faradayschen Gesetzes (für das Magnetfeld) berechnen.

Aus dem oben angegebenen System werden wir im folgenden Dispersionbeziehungen für unterschiedliche Wellentypen herleiten. Generell ist eine Dispersionsbeziehung durch $\omega = \omega(k)$ gegeben. Mit ihr erhalten wir die Größen, welche die Ausbreitung der Welle beschreiben: Die Phasengeschwindigkeit $v_{ph} = \omega/k$, die Gruppengeschwindigkeit $v_{gr} = d\omega/dk$ und den Brechungsindex $N = c/v_{ph} = ck/\omega$. Fig. 7.1 zeigt eine allgemeine Dispersionsrelation.

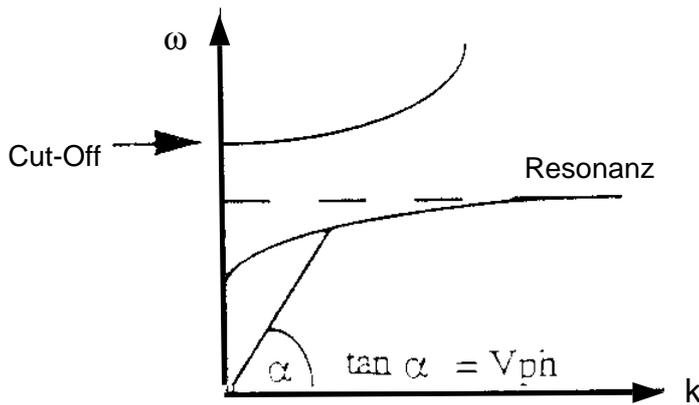


Abbildung 7.1: Typische Dispersionsrelation im Plasma (schematisch), es liegt ein Cut-Off und eine Resonanz vor.

Dabei sind die folgenden Punkte von besonderer Bedeutung:

- $N = 0$: Hier verschwindet k bei endlichem ω , d.h. $v_{ph} \rightarrow \infty$. Die Welle breitet sich nicht aus, es liegt ein sogenannter *Cut-Off* vor. Läuft eine Welle auf eine Schicht mit $N = 0$ zu, so kann sie nicht eindringen und wird reflektiert.
- $N \rightarrow \infty$: Hier bleibt ω für $k \rightarrow \infty$ endlich, d.h. für beliebige hohe Wellenzahlen schwingt die Welle mit der gleichen Frequenz. Dies ist der Fall, wenn eine *Resonanz* im Plasma auftritt. Bei diesen Frequenzen kann durch Wellen besonders effektiv Energie auf das Plasma übertragen werden. Bei einer Resonanz gehen v_{ph} und v_{gr} gegen Null. Bei Annäherung der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit an die thermische Geschwindigkeit der Teilchen werden kinetische Effekte wichtig; ein genaues Bild der Resonanz erfordert meist Beschreibung mit der entsprechenden kinetischen Gleichung.

7.2 Wellen ohne äußeres Magnetfeld

Zunächst betrachten wir Wellen ohne äußeres Magnetfeld d.h. $\mathbf{B}_0 = 0$. Damit verschwindet in den Wellengleichungen der Term $\mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{b}$. Es ist keine Richtung im Plasma ausgezeichnet. Wie

oben erwähnt, ist der mit der Welle verbundene Vektor \mathbf{B} immer senkrecht zu \mathbf{k} ; die Wellen können daher nach der Orientierung von \mathbf{E} relativ zu \mathbf{k} unterschieden werden.

7.2.1 Transversalwellen

Diese Orientierung ist analog zu den elektromagnetischen Wellen im Vakuum: \mathbf{E} und \mathbf{B} stehen senkrecht auf \mathbf{k} . Damit gilt $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ und die Wellengleichung (7.11) vereinfacht sich zu

$$\left(1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2}\right) \mathbf{E} = -i \frac{\omega_{pe}^2}{\omega} \frac{m_e}{e} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) \quad (7.14)$$

Somit ist die Differenz der Elektronen- und Ionengeschwindigkeit (d.h. der im Plasma fließende Strom) parallel zu \mathbf{E} . Für die Differenzgeschwindigkeit erhalten wir aus dem obigen Gleichungssystem

$$\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e = \frac{ie}{\omega} \mathbf{E} \left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_e} \right) + \mathbf{k} (c_i^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_i) - c_e^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_e)) \quad (7.15)$$

Wegen $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$ und $(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) \parallel \mathbf{E}$ trägt der zu \mathbf{k} proportionale Term der Gleichung nicht bei und wir können (mit $m_i \gg m_e$) die Gleichungen zusammenfassen:

$$\left(1 - \frac{c^2 k^2}{\omega^2}\right) \mathbf{E} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \mathbf{E} = 0 \quad (7.16)$$

Daraus erhalten wir direkt die Dispersionsrelation

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + c^2 k^2 \quad (7.17)$$

Für $\omega \gg \omega_{pe}$ erhalten wir das von der elektromagnetischen Welle im Vakuum bekannte Ergebnis $\omega = ck$. In diesem Fall können die Plasmateilchen (insbesondere die leicht beweglichen Elektronen) dem oszillierenden E -Feld nicht folgen und die Welle breitet sich wie im Vakuum aus.

Für $\omega \rightarrow \omega_{pe}$ hingegen wird ein E -Feld zunehmend durch die Elektronen abgeschirmt: die Welle kann schließlich für $\omega \leq \omega_{pe}$ nicht mehr in das Plasma eindringen, es liegt ein Cut-off vor. Die Dispersionsrelation ist in Fig. 7.2 eingezeichnet.

Das Verhalten bei $\omega \rightarrow \omega_{pe}$ wird deutlich, wenn man aus (7.17) den Brechungsindex $N = c/v_{ph}$ berechnet:

$$N = \sqrt{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}} \quad (7.18)$$

Für $\omega > \omega_{pe}$ ist $N < 1$, d.h. $v_{ph} > 0$. Für $\omega < \omega_{pe}$ wird das Argument der Wurzel negativ und somit N imaginär. Damit ist der Wellenzahlvektor imaginär und die Amplitude der Welle fällt exponentiell ab:

$$\mathbf{E} \sim e^{iNkx} \sim e^{-\Im(N)kx} \quad (7.19)$$

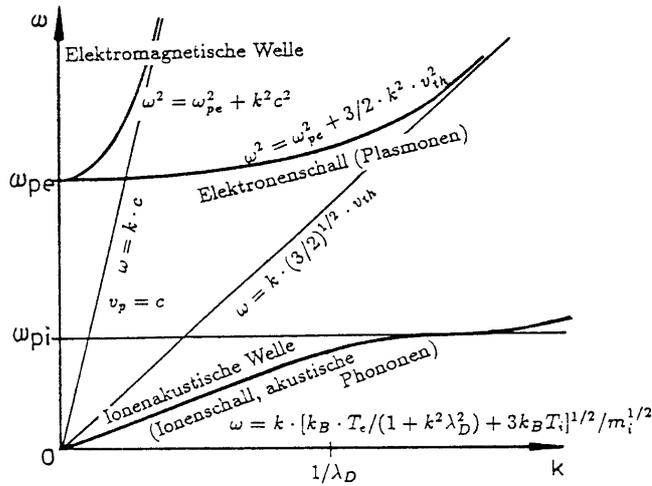


Abbildung 7.2: Dispersionsrelation von Plasmawellen ohne Magnetfeld.

wobei $\Im(N)$ den Imaginärteil von N bezeichnet. Die Welle dringt also nur bis zur *Skintiefe* $\delta = c / \sqrt{\omega_{pe}^2 - \omega^2}$ ein und wird im wesentlichen reflektiert. Dieses Verhalten kann zur Diagnostik verwendet werden: Strahlt man eine Transversalwelle bekannter Frequenz ω in ein Plasma ein, so wird diese reflektiert, wenn die Plasmadichte n so groß ist, daß $\omega_{pe} \geq \omega$ gilt. Stimmt man die Frequenz der eingestrahlten Welle durch und mißt die reflektierte Intensität, so kann man daraus also die maximale Plasmadichte bestimmen. Wir werden später sehen, wie man aus einer solchen Messung sogar Profile der Plasmadichte $n(x)$ erhalten kann.

7.2.2 Longitudinalwellen

Bei den Longitudinalwellen ist $\mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$, d.h. in (7.11) verschwindet der Term $\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) - k^2 \mathbf{E}$. Wegen $\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B}$ verschwindet für die Longitudinalwellen auch das \mathbf{B} -Feld der Welle. Man hat es also mit *elektrostatischen* Wellen zu tun. Diese treten im Vakuum nicht auf, sie entstehen durch die Existenz eines elektrischen Stromes auf Grund der geladenen Teilchen im Plasma:

$$i\mathbf{k} \times \mathbf{B} = \frac{i}{\omega} \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \mu_0 n e (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) - \frac{1}{c^2} i \omega \mathbf{E} = 0 \tag{7.20}$$

Der durch die Differenzgeschwindigkeit von Ionen und Elektronen gegebene Plasmastrom kompensiert also gerade den durch das zeitlich veränderliche \mathbf{E} -Feld hervorgerufenen Verschiebungsstrom, sodaß das Magnetfeld verschwindet.

Das Gleichungssystem für die Wellen vereinfacht sich zu

$$\mathbf{E} = -i \frac{\omega_{pe}^2 m_e}{\omega e} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) \tag{7.21}$$

$$\left(1 - \frac{k^2 c_i^2}{\omega^2}\right) \mathbf{u}_{i\parallel} = i \frac{e}{\omega m_i} \mathbf{E} \tag{7.22}$$

$$\left(1 - \frac{k^2 c_e^2}{\omega^2}\right) \mathbf{u}_{e\parallel} = i \frac{e}{\omega m_e} \mathbf{E} \quad (7.23)$$

Hierbei haben wir bereits von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß wiederum nur die Geschwindigkeitskomponenten parallel zu \mathbf{E} und damit auch parallel zu \mathbf{k} eingehen. Mit $\omega_{pe} = \omega_{pi} \sqrt{m_i/m_e}$ erhalten wir so die Dispersionsrelation

$$1 = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - c_i^2 k^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - c_e^2 k^2} \quad (7.24)$$

Diese führt auf eine Gleichung 4. Grades für $\omega(k)$. Wir können jedoch bereits an der Form (7.24) erkennen, daß dieser Wellentyp einen Ionen- und einen Elektronenast in der Dispersionsrelation besitzt. Weiterhin tauchen als charakteristische Geschwindigkeiten die Schallgeschwindigkeiten c_i, c_e auf. Wir haben es also, ähnlich den Longitudinalwellen im idealen Gas, mit Schallwellen zu tun. Allerdings koppeln diese wegen der Anwesenheit geladener Teilchen an das E -Feld und ändern so die Dispersionsrelation.

Fig. 7.2 zeigt die beiden möglichen Lösungsäste. Für die Elektronenschallwelle erhalten wir näherungsweise

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 \frac{3k_B T_e}{m_e} \quad (7.25)$$

Diese Gleichung ist von ähnlicher Form wie die Dispersionsrelation der transversalen Welle (7.16), nur daß hier als Ausbreitungsgeschwindigkeit anstelle der Lichtgeschwindigkeit die (wesentlich kleinere) eindimensionale ($f = 1$, d.h. $\gamma = 3$) Schallgeschwindigkeit $c_e = \sqrt{\gamma k_B T_e / m_e}$ auftritt. Wiederum ergibt sich ein Cut-off für $\omega \leq \omega_{pe}$, d.h. die Elektronenschallwelle kann sich für Frequenzen unterhalb der Plasmafrequenz nicht ausbreiten.

Die Verhältnisse ändern sich für die ebenfalls in Fig. 7.2 eingezeichnete Ionenschallwelle. Diese besitzt für große Wellenlängen $k\lambda_D \ll 1$ die Dispersionsrelation

$$\omega \approx \sqrt{\frac{k_B(T_e + 3T_i)}{m_i}} k \quad (7.26)$$

Für $T_e \neq 0$ erhalten wir also eine verallgemeinerte Ionenschallgeschwindigkeit, in der zusätzlich zur eindimensionalen Ionenschallgeschwindigkeit $\sqrt{3k_B T_i / m_i}$ die Elektronentemperatur erscheint. Die Elektronen können aber auf Grund ihrer höheren Beweglichkeit als isotherm angesehen werden, d.h. $f \rightarrow \infty$. Auf Grund der Anwesenheit der Elektronen expandiert also ein Plasmawolke schneller als mit der eindimensionalen Ionenschallgeschwindigkeit. Dies kann man sich so vorstellen; Auf Grund der höheren Beweglichkeit eilen die Elektronen bei einer Expansion den Ionen voraus. Wir haben jedoch schon gesehen, daß dies mit dem Aufbau eines Raumladungsfeldes verbunden ist, welches nur auf der Dimension $\approx \lambda_D$ aufrecht erhalten werden kann. Damit üben die Elektronen eine zusätzliche Kraft auf die Ionen aus, welche dazu führt, daß die Ausbreitung schneller als mit der vom neutralen Gas bekannten Ionenschallgeschwindigkeit erfolgt. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist aber immer noch durch die Masse der Ionen limitiert, daher taucht auch in (7.26) nur m_i auf.

Für $T_i = 0$ und kurze Wellenlängen ($k \rightarrow \infty$) gilt (7.26) nicht mehr und man erhält eine Resonanz bei $\omega = \omega_{pi}$, d.h. eine elektrostatische Ionenschwingung. In diesem Fall gibt es keine Longitudinalwellen für $\omega_{pi} < \omega < \omega_{pe}$.

7.3 Wellen mit äußerem Magnetfeld

Wie untersuchen nun den Fall eines endlichen äußeren Magnetfeldes, d.h. $\mathbf{B}_0 \neq 0$. Durch das Magnetfeld wird eine Richtung des Raumes ausgezeichnet und wir müssen nun zwei Winkel betrachten:

- Winkel zwischen \mathbf{k} und \mathbf{B}_0 : Die Ausbreitung der Welle kann sowohl längs des Magnetfeldes als auch senkrecht dazu erfolgen.
- Winkel zwischen \mathbf{E} und \mathbf{B}_0 : Je nach Orientierung von \mathbf{E} relativ zum Magnetfeld wird die Teilchenbewegung von \mathbf{B}_0 beeinflusst. Die Beschleunigung der Teilchen durch die Welle erfolgt über die Kraft $q\mathbf{E}$. Somit erhalten wir für $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}_0$ dasselbe Ergebnis wie für $\mathbf{B}_0 = 0$, da die Teilchenbewegung längs des Magnetfeldes von \mathbf{B} unbeeinflusst bleibt. Im Gegensatz hierzu spüren die Teilchen im Fall $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}_0$ die Lorentzkraft senkrecht zur Geschwindigkeit und die Gyrationbewegung wird wichtig.

Im allgemeinen Fall können beide Winkel beliebige Werte annehmen. Die Beschreibung der Wellen wird dann kompliziert, da unterschiedliche Effekte mischen. Wir werden daher hier nur die 2×2 Fälle betrachten, in denen die Winkel entweder 0° oder 90° sind.

7.3.1 Ausbreitung parallel zum Magnetfeld

E-Feld parallel zu *B*

In diesem Fall beschleunigt das *E*-Feld die Teilchen längs des Magnetfeldes; dieses verändert daher die Bewegung nicht. Wir erhalten als Lösung die gleichen Wellen wie im Fall $\mathbf{B}_0 = 0$. Wegen $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}_0 \parallel \mathbf{k}$ sind dies die Longitudinalwellen, d.h. Elektronen- und Ionenschall.

E-Feld senkrecht zu *B*

In diesem Fall ist $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$. Mit dieser Vereinfachung kann man das Gleichungssystem (7.11) - (7.13) auflösen. Wir wollen dies nicht explizit tun. Nach umfangreicher Rechnung erhält man eine Dispersionsrelation. Die zugehörigen Eigenvektoren E_x und E_y stehen dabei in fester Phasenbeziehung. Es existieren zwei Lösungen, bei denen E_x und E_y um $\pm 90^\circ$ gegeneinander verschoben sind. Diese stellen zirkular polarisierte Wellen dar, welche je nach Phasenlage rechts- (Index *R*) oder linkszirkular (*L*) polarisiert sind. Die Gleichung für den Brechungsindex *N* lautet

$$N_{R,L}^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2}{(\omega \pm \omega_{ci})(\omega \mp \omega_{ce})} \quad (7.27)$$

Für beide Polarisationsrichtungen erhält man wiederum eine Resonanz und einen Cut-off. Für die rechtszirkular polarisierte Welle hat N einen Pol bei $\omega = \omega_{ce}$, d.h. der E -Vektor läuft gerade mit der Elektronenzyklotronfrequenz um und gerät in Resonanz mit der Gyrationbewegung der Elektronen. Wie in Kap. 5 gezeigt, ist die Bahn der Elektronen im Magnetfeld eine Rechtsschraube; die Polarisationsrichtung stimmt also mit der Einzelteilchenbewegung überein. Der analoge Fall tritt für die linkszirkular polarisierte Welle ein: die Einzelteilchenbewegung der Ionen stellt eine Linksschraube dar, daher koppelt die linkszirkular polarisierte Welle an die Ionengyration und hat eine Resonanz bei $\omega = \omega_{ci}$.

Die Cut-offs ergeben sich aus den Nullstellen von N . Man erhält

$$\omega_{R,L} = \sqrt{\frac{(\omega_{ce} + \omega_{ci})^2}{4} + \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2} \pm \frac{\omega_{ce} - \omega_{ci}}{2} \quad (7.28)$$

Für endliche Dichte ist $\omega_R > \omega_{ce}$ und $\omega_L > \omega_{ci}$, sodaß sich Frequenzbereiche ergeben, in denen die Wellenausbreitung nicht möglich ist. Fig 7.3 zeigt die Dispersionsrelation für die beiden Polarisierungen.

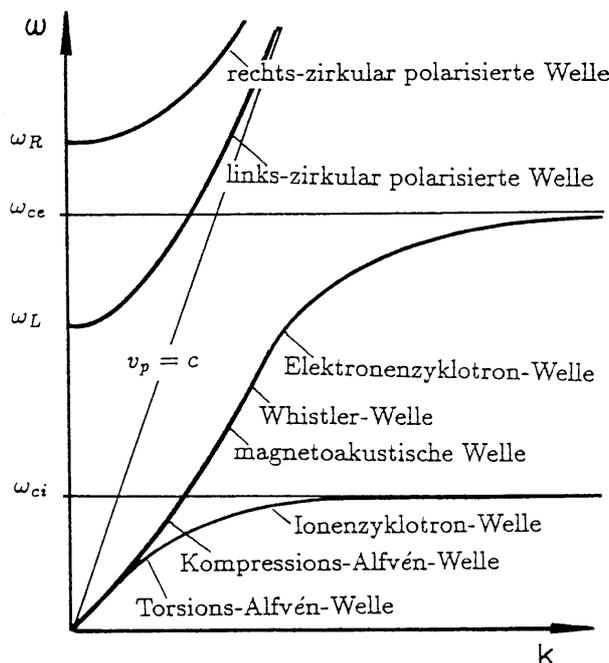


Abbildung 7.3: Dispersionsrelation von Plasmawellen bei Ausbreitung längs eines externen Magnetfelds.

Es ist zu beachten, daß es sich hier um *einen* Wellentyp handelt, der aber in den unterschiedlichen Bereichen der Dispersionsrelation unterschiedliche Namen hat. So nennt man die rechtszirkular polarisierte Welle unterhalb der Resonanz bei ω_{ce} auch die Elektronenzyklotronwelle,

analog folgt der Name Ionenzyklotronwelle für die linkszirkular polarisierte Welle unterhalb $\omega = \omega_{ci}$.

In Fig. 7.3 kann man erkennen, daß die Phasengeschwindigkeit der rechtszirkular polarisierten Welle immer größer als die der linkszirkular polarisierten Welle ist. Dies macht sich bemerkbar, wenn eine linear polarisierte Welle durch ein Plasma läuft. Eine linear polarisierte Welle kann als aus zwei zirkular polarisierten Wellen gleicher Frequenz und unterschiedlicher Drehrichtung aufgefaßt werden. Die Polarisationsrichtung ergibt sich aus der Phasenbeziehung der zirkular polarisierten Wellen zueinander. Im Plasma läuft nun die linkszirkular polarisierte Welle langsamer und somit ändert sich die Phasenbeziehung der zirkular polarisierten Wellen zueinander. Nach Verlassen des Plasmas liegt somit eine andere Phasenbeziehung vor. Diese auch als *Faradayeffekt* bekannte Drehung der Polarisationssebene einer ebenen Welle im magnetisierten Plasma läßt sich diagnostisch nutzen: der Drehwinkel der Polarisationssebene ist proportional zu nB ; daher läßt sich diese Größe daraus bestimmen. Bei gleichzeitiger Kenntnis des Dichteprofiles (z.B. aus einer Reflektometermessung) ergibt sich die Möglichkeit, das Magnetfeld im Plasma zu bestimmen.

Im Bereich $\omega_{ci} \leq \omega \leq \omega_L$ existiert nur die rechtszirkular polarisierte Welle. Man findet in diesem Bereich eine starke Dispersion, d.h. v_{ph} und v_{gr} nehmen proportional $\sqrt{\omega}$ zu. Höherfrequente Wellen laufen daher schneller. Dies macht sich bei den sogenannten *Whistler* bemerkbar (engl. to whistle = pfeifen). Werden z.B. auf der Südhalbkugel der Erde durch Gewitter elektromagnetische Störungen ausgelöst, so können diese als Wellen längs des Erdmagnetfeldes durch das Plasma der Ionosphäre auf die Nordhalbkugel gelangen. Auf dem Weg durch die Ionosphäre werden die niederfrequenten Anteile auf Grund der langsameren Phasengeschwindigkeit verzögert, sodaß sie später auf der Nordhalbkugel ankommen. Sie ursprünglich Störung wird also zeitlich auseinandergezogen und äußert sich z.B. in einem Radioempfänger auf der Nordhalbkugel als Pfeifton abnehmender Frequenz, woraus sich der Name Whistler erklärt.

Schließlich wollen wir die Ionenzyklotronwelle im Grenzfall $\omega \rightarrow 0$ betrachten. Dann gilt $\omega \ll \omega_{ci} \ll \omega_{ce}$ und die Dispersionsrelation vereinfacht sich zu $N_L \approx \omega_{pe}^2 / (\omega_{ce} \omega_{ci})$. Im Fall $\omega_{pe} \geq \omega_{ce}$, der z.B. in magnetisierten Fusionsplasmen häufig vorliegt, kann die 1 vernachlässigt werden und wir erhalten für die Phasengeschwindigkeit der Welle

$$v_{ph} = c/n = c \frac{eB}{\sqrt{m_e m_i}} \frac{\sqrt{m_e \epsilon_0}}{\sqrt{ne}} = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 m_i n}} = v_A \quad (7.29)$$

die sogenannte Alfvengeschwindigkeit v_A . Dieser Wellentyp kann auch direkt aus den MHD Gleichungen gewonnen werden. Die Alfvengeschwindigkeit ist die Geschwindigkeit, mit der sich in der idealen MHD Störungen der Feldlinien ausbreiten. Lenkt man ein Flüssigkeitselement aus der Ruhelage aus, so werden damit wegen des eingefrorenen Flusses auch die Feldlinien ausgelenkt. Dies erzeugt nach Kap. 6 eine Rückstellkraft auf Grund der Feldlinienspannung B_0^2/μ_0 . Das Magnetfeld verhält sich wie eine schwingende Saite, die Störung breitet sich parallel zu B_0 aus, wobei B_0 senkrecht zur Wellenausbreitung ausgelenkt wird. Dieser Typ von MHD-Wellen wird auch torsionale Alfvén-Welle (Shear-Alfvén Wave) genannt.

7.3.2 Ausbreitung senkrecht zum Magnetfeld

E-Feld parallel zu *B*

In diesem Fall werden die Teilchen wiederum längs des Magnetfeldes beschleunigt und spüren somit dessen Wirkung nicht. Die in diesem Fall auftretende Welle ist somit die transversale elektromagnetische Welle mit Cut-off bei ω_{pe} . Dieser Fall wird oft auch als 'ordentliche Welle' (ordinary wave, O-mode) bezeichnet. Diese Bezeichnung darf aber nicht mit der aus der Optik bekannten ordentlichen Welle im doppelbrechenden Kristall verwechselt werden.

E-Feld senkrecht zu *B*

In diesem Fall liegen sowohl \mathbf{k} als auch \mathbf{E} in der Ebene senkrecht zu B_0 . Sie sind damit aber im allgemeinen Fall weder parallel noch senkrecht zueinander, sodaß eine Unterscheidung in Transversal- und Longitudinalwellen nicht möglich ist. Man erhält so im allgemeinen elliptisch polarisierte Wellen. Dieser Wellentyp wird auch als außergewöhnliche Welle (extraordinary wave, X-mode) bezeichnet.

Die Berechnung der Dispersionsrelation ist wiederum komplex; im kalten Plasma, d.h. für $v_{ph} \gg v_{th}$, kann man $c_i = c_e = 0$ setzen und erhält

$$N^2 = \frac{\omega^2 - \omega_L^2}{\omega^2 - \omega_{UH}^2} \frac{\omega^2 - \omega_R^2}{\omega^2 - \omega_{OH}^2} \quad (7.30)$$

Es treten also wieder Cut-offs bei den Frequenzen ω_R und ω_L auf. Die Resonanzen liegen jedoch im Gegensatz zum Fall der Ausbreitung längs des Magnetfeldes nicht bei den Einzelteilchen Gyroresonanzen, sondern bei den sogenannten Hybridfrequenzen, d.h. der unteren Hybridfrequenz

$$\frac{1}{\omega_{UH}^2} = \frac{1}{\omega_{pi}^2 + \omega_{ci}^2} + \frac{1}{\omega_{ci}\omega_{ce}} \quad (7.31)$$

und der oberen Hybridfrequenz

$$\omega_{OH}^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2 \quad (7.32)$$

Die Resonanzen sind also nicht mehr durch die Gyrobewegung allein sondern durch eine Mischung (Hybrid) aus Einzelteilcheneffekten ($\omega_{ce,i}$) und kollektive Raumladungseffekte ($\omega_{pe,i}$) bestimmt. Außerdem nehmen an der unteren hybriden Resonanz sowohl die Ionen als auch die Elektronen teil. Diese bewegen sich dann gerade synchron auf Ellipsenbahnen, wobei die (schnelleren) Elektronen gerade eine Ellipse durchlaufen, deren kleine Halbachse mit der großen Halbachse der von den Ionen durchlaufenen Ellipse zusammenfällt. Dabei bewegen sich die Ionen im wesentlichen längs des *E*-Feldes und werden durch die Lorentzkraft auf die Ellipsenbahn gezwungen, während der Drehsinn der Elektronen der statischen Gyrobewegung entgegengerichtet ist und im wesentlichen von der $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Drift bestimmt ist. Fig. 7.4 verdeutlicht die Geometrie.

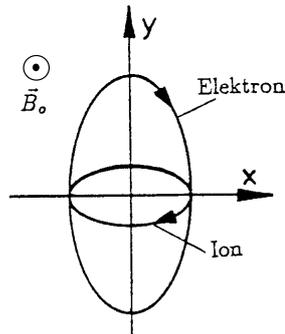


Abbildung 7.4: Teilchenbewegung bei der unteren hybriden Resonanz.

Bei der oberen hybriden Resonanz, an der nur die Elektronen teilnehmen, wird die Gyrobewegung der Einzelteilchen durch Raumladungseffekte modifiziert, was zu einer Erhöhung der Resonanzfrequenz führt.

Fig. 7.5 zeigt die Dispersionsrelation.

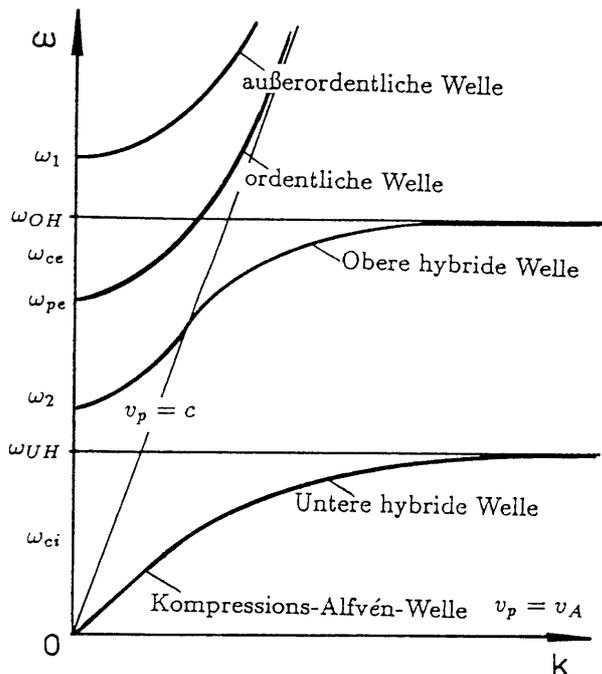


Abbildung 7.5: Dispersionsrelation von Plasmawellen bei Ausbreitung senkrecht zu einem externen Magnetfeld.

Schließlich erhalten wir für kleine Frequenzen wieder eine Alfvénwelle: für $\omega \ll \omega_{ci} \ll \omega_{ce} \ll \omega_{pe}$ erhalten wir $\omega_L \approx \omega_R \approx \omega_{OH}$ und $\omega_{UH} \approx \omega_{ce}\omega_{ci}$, sodaß sich für den Brechungsindex $N \approx \omega_{pe}/\sqrt{\omega_{ce}\omega_{ci}}$ ergibt. Wie bei der Orientierung parallel zum Magnetfeld ergibt sich für kleine Frequenzen $v_{ph} = v_A$. Diesmal haben wir es aber mit einer kompressionalen Alfvénwelle zu tun: Da die Ausbreitung senkrecht zum Magnetfeld erfolgt, werden hier die Gleich-

gewichtsfeldlinien gegeneinander verschoben, d.h. die Rückstellkraft ist diesmal der magnetische Druck $p = B^2/(2\mu_0)$.

Formal erhalten wir die Ausbreitungsgeschwindigkeit auch, wenn wir in die für eine Druckwelle im Gas bekannte Formel $v_{ph} = \sqrt{\gamma k_B T / m} = \sqrt{\gamma p / (\rho)}$ für p den magnetischen Druck einsetzen und berücksichtigen, daß senkrecht zum Magnetfeld zwei Freiheitsgrade zur Verfügung stehen (d.h. $f = 2$ und $\gamma = 2$).

Kapitel 8

Literaturverzeichnis

- L. A. Artsimovich, R. Z. Sagdeev, Plasmaphysik für Physiker, Teubner Studienbücher, 1983
- G. Bateman, MHD-Instabilities, The MIT Press, Cambridge and London, 1978
- F. F. Chen, Introduction to Plasmaphysics, Plenum Press, New York, 1984
- J. Freidberg, Ideal MHD, Plenum Press, New York and London, 1987
- R. Goldston, P.H. Rutherford: Plasmaphysik - Eine Einführung, Vieweg Verlag, 1998
- I. Hutchinson, Principles of Plasma Diagnostics, Cambridge University Press, 1987
- R. Kippenhahn, C. Möllenhoff, Elementare Plasmaphysik, BI Wissenschaftsverlag, 1975
- K. Miyamoto, Plasma Physics for Controlled Fusion, MIT Press, Cambridge and London, 1989
- J. Raeder, Kontrollierte Kernfusion, Teubner Studienbücher, 1981
- A. Rutscher, H. Deutsch, Plasmatechnik-Grundlagen und Anwendungen, Carl Hanser Verlag, 1984
- U. Schumacher, Fusionsforschung - Eine Einführung, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1993
- K. H. Spatschek, Theoretische Plasmaphysik, Teubner Studienbücher, Stuttgart, 1990
- W.M. Stacey, Fusion Plasma Analysis, Wiley and Sons, 1981
- J. Wesson, Tokamaks, Oxford Engineering Science Series, Clarendon Press, Oxford, 1987
- K. Wiesemann, Einführung in die Gaselektronik, Teubner Studienbücher, Stuttgart, 1976